

1. Résoudre l'équation  $\operatorname{sh} x = 2$ 

Comme  $\operatorname{sh}$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , on sait qu'il y a une unique solution.

$$\operatorname{sh} x = 2 \Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 2 \Leftrightarrow e^x - \frac{1}{e^x} = 4 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 1 = 4e^x \Leftrightarrow e^x \text{ est solution de } X^2 - 4X - 1 = 0$$

Les solutions de  $X^2 - 4X - 1 = 0$  de discriminant  $\Delta = 16 + 4 = 20 = (2\sqrt{5})^2$  sont  $\frac{4 - 2\sqrt{5}}{2} = 2 - \sqrt{5} < 0$  et  $2 + \sqrt{5} > 0$

Ainsi :  $\operatorname{sh} x = 2 \Leftrightarrow e^x = 2 + \sqrt{5}$  (unique solution positive)  $\Leftrightarrow x = \ln(2 + \sqrt{5})$

2. L'objectif de la question est de donner la valeur exacte du réel  $a = \operatorname{Arccos}\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)$ 

(a) Démontrer que  $\sin(a) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

Par définition :  $\cos(a) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$  et on sait aussi que  $\sin(a) \geq 0$  car  $a \in [0, \pi]$

Aussi :  $\sin(a) = |\sin(a)| = \sqrt{\sin^2(a)} = \sqrt{1 - \cos^2(a)} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)^2}$  soit :

$$\sin(a) = \frac{1}{2} \sqrt{16 - (6 + 2\sqrt{6}\sqrt{2} + 2)} = \frac{1}{2} \sqrt{8 - 2\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{6 + 2 - 2\sqrt{2}\sqrt{6}} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2} = \frac{|\sqrt{6} - \sqrt{2}|}{2}$$

Comme  $\sqrt{6} > \sqrt{2}$ , on a bien  $\sin(a) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

(b) Prouver que  $\sin(3a) = \sin(a)(4\cos^2(a) - 1)$ . En déduire alors que  $\sin(3a) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\sin(3a) = \sin(2a + a) = \sin(2a)\cos(a) + \sin(a)\cos(2a) = 2\sin(a)\cos(a) \times \cos(a) + \sin(a) \times (2\cos^2(a) - 1)$$

$$\text{Aussi : } \sin(3a) = 2\sin(a)\cos^2(a) + \sin(a) \times (2\cos^2(a) - 1) \Leftrightarrow \sin(3a) = \sin(a)(4\cos^2(a) - 1)$$

En substituant les valeurs connues de  $\sin(a)$  et  $\cos(a)$  :

$$\sin(3a) = \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right) \left(4\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)^2 - 1\right) = \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right) \left(\frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 - 4}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right) \left(\frac{(4 + 2\sqrt{6}\sqrt{2})}{4}\right)$$

$$\text{d'où : } \sin(3a) = \frac{1}{4^2} (4\sqrt{6} + 12\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - 4\sqrt{6}) = \frac{8\sqrt{2}}{16} \text{ soit } \sin(3a) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(c) On donne  $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} > \frac{\sqrt{3}}{2}$  Démontrer que  $3a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  puis déterminer la valeur exacte de  $a$ .

Comme  $1 > \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} > \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$  et que  $\operatorname{Arccos}$  est strictement décroissante :

$$\operatorname{Arccos}(1) < \operatorname{Arccos}\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right) < \operatorname{Arccos}\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 0 < a < \frac{\pi}{6} \Rightarrow 0 < 3a < \frac{\pi}{2}$$

Mais alors :  $\operatorname{Arcsin}(\sin(3a)) = 3a$  puisque  $3a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[ \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  or  $\sin(3a) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  donc

$$3a = \operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow a = \frac{\pi}{12}$$