EXEMPLE N° 1 Dans chaque cas, prouver que F est un espace vectoriel dont on précisera la dimension.

Point méthode : déterminer la dimension d'un sous-espace vectoriel

1. On détermine l'espace ambiant de référence (ce qui permet d'identifier vecteurs/scalaires/zéros et la définitions des lois interne + et externe $\mathbb{K}$.
2. On recherche une famille génératrice en exprimant les vecteurs du sev comme combinaison linéaire de vecteurs fixes (ne dépendant d'aucun paramètre scalaire). Il s'agit, bien souvent, de bien traduire les conditions d'appartenance au sev
3. On détermine le caractère libre/liée de la famille génératrice et on retire éventuellement des vecteurs jusqu'à obtenir une famille qui reste génératrice et qui est libre.

z) $F = \text{Vect}\Big((1,0,1,1),(1,1,1,1),(0,1,0,-1),(1,1,1,-1)\Big)$

F est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel puisque c'est un sous-espace vectoriel (sev) de l'espace usuel $\mathbb{R}^4$
On connaît une famille génératrice de F : $(u,v,w,x) = \Big((1,0,1,1),(1,1,1,1),(0,1,0,-1),(1,1,1,-1)\Big)$
On extrait une base de cette famille en étudiant l'indépendance linéaire de u, v, w et x :

$$\forall(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^4,\ \alpha u+\beta v+\gamma w+\delta x=(0,0,0,0)=0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+\beta\quad+\delta=0\\ \beta+\gamma+\delta=0\\ \alpha+\beta\quad+\delta=0\\ \alpha+\beta-\gamma-\delta=0\end{cases} \underset{\substack{L_3\leftarrow L_3-L_1\\ L_4\leftarrow L_4-L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases}\alpha+\beta\quad+\delta=0\\ \beta+\gamma+\delta=0\\ 0=0\\ -\gamma-2\delta=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-2\delta\\ \beta=\delta\\ \gamma=-2\delta\end{cases}$$

On obtient ainsi une combinaison linéaire nulle non triviale en imposant $\delta=1$: $-2u+v-2w+x=0_{\mathbb{R}^4}$
La famille est liée et : $F=\text{Vect}(u,v,w)$ puisque $x\in\text{Vect}(u,v,w)$. On étudie alors la liberté de (u,v,w) :

$$\forall(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3,\ \alpha u+\beta v+\gamma w=(0,0,0,0)=0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+\beta\qquad=0\\ \beta+\gamma=0\\ \cancel{\alpha+\beta\qquad=0}\\ \alpha+\beta-\gamma=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-\beta\\ \gamma=-\beta\\ -\beta+\beta+\beta=0\end{cases} \Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$$

La famille (u,v,w) est libre et on sait qu'elle est génératrice de F donc c'est une base de F et $\dim F=3$

b) $F=\{(t+2s,-t,4s-t)\mid(t,s)\in\mathbb{R}^2\}$

Dans $\mathbb{R}^3$: $(x,y,z)\in F\Leftrightarrow\exists(t,s)\in\mathbb{R}^2,\ (x,y,z)=(t+2s,-t,4s-t)=t\underbrace{(1,-1,-1)}_{=\vec{u}}+s\underbrace{(2,0,4)}_{=\vec{v}}\Leftrightarrow(x,y,z)\in\text{Vect}(\vec{u},\vec{v})$

Aussi : $F=\text{Vect}(\vec{u},\vec{v})$ et la famille génératrice $(\vec{u},\vec{v})$ est libre car les deux vecteurs sont non colinéaires.
Ainsi, $(\vec{u},\vec{v})$ est une base de F et $\dim F=2$

c) $F=\{(\alpha+\beta)X^2+(\alpha-\beta)\mid(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\}$

Dans $\mathbb{R}[X]$: $P\in F\Leftrightarrow\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ P=(\alpha+\beta)X^2+(\alpha-\beta)=\alpha(X^2+1)+\beta(X^2-1)\Leftrightarrow P\in\text{Vect}(X^2+1,X^2-1)$
Aussi : $F=\text{Vect}(X^2+1,X^2-1)$ et les 2 polynômes X^2+1 et X^2-1 sont linéairement indépendants (car coefficients non proportionnels) aussi (X^2+1,X^2-1) est une base de F et $\dim F=2$

d) $F=\left\{\begin{pmatrix}a&b&0\\0&ia+b&b+2ic\end{pmatrix}\mid(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}$

Dans le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $M_{2,3}(\mathbb{C})$:

$$F=\left\{a\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&i&0\end{pmatrix}}_{=A}+b\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}}_{=B}+c\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&2i\end{pmatrix}}_{=C}\mid(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}=\text{Vect}(A,B,C)$$

On étudie la liberté de (A,B,C) : $\forall(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$,

$$aA+bB+cC=0_{2,3}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a&b&0\\0&ia+b&b+2ic\end{pmatrix}=0_{23}\Rightarrow\begin{cases}a=0\ \text{coeff 1,1}\\ b=0\ \text{coeff 1,2}\\ b+2ic=0\ \text{coeff 2,3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\ b=0\\ b=2c=0\end{cases}\Rightarrow a=b=c=0$$

La famille (A,B,C) qui est génératrice de F est aussi libre : c'est une base de F et $\dim F=3$

e) $\mathrm{F} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{K}^4 \mid x+y+z+t = x-y+z-t = 0\}$

Dans le $\mathbb{K}$ ev $\mathbb{K}^4$: $(x,y,z,t) \in \mathrm{F} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=0 \end{cases} \Leftrightarrow_{L_2 \leftarrow L_2+L_1} \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 2x+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+t=0 \\ z=-x \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} t=-y \\ z=-x \end{cases} \Leftrightarrow (x,y,z,t) = x(1,0,-1,0) + y(0,1,0,-1)$ où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

aussi : $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\big((1,0-1,0),(0,1,0,-1)\big)$ où les deux vecteurs sont non colinéaires donc $\big((1,0-1,0),(0,1,0,-1)\big)$ est une base de F et $\dim \mathrm{F} = 2$

f) F contient les polynômes réels de degrés au plus 3 avec $\mathrm{P}(1) = \mathrm{P}^{(3)}(1) = 0$

Dans le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$:

Pour $\mathrm{P} = a + b\mathrm{X} + c\mathrm{X}^2 + d\mathrm{X}^3$ avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ alors $\begin{cases} \mathrm{P}' = b + 2c\mathrm{X} + 3d\mathrm{X}^2 \\ \mathrm{P}'' = 2c + 6d\mathrm{X} \\ \mathrm{P}^{(3)} = 6d \end{cases}$ auss

$\mathrm{P} \in \mathrm{F} \Leftrightarrow \underbrace{\exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4,\ \mathrm{P} = a + b\mathrm{X} + c\mathrm{X}^2 + d\mathrm{X}^3}_{(1)}$ et $\mathrm{P}(1) = \mathrm{P}^{(3)}(1) = 0$

$\Leftrightarrow (1)$ et $\begin{cases} a+b+c+d=0 \\ 6d=0 \end{cases} \Leftrightarrow (1)$ et $\begin{cases} c=-a-b \\ d=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\quad \mathrm{P} = a + b\mathrm{X} - (a+b)\mathrm{X}^2 = a(1-\mathrm{X}^2) + b(\mathrm{X}-\mathrm{X}^2)$

Ainsi : $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2)$ où $\mathrm{P}_1 = 1 - \mathrm{X}^2$ et $\mathrm{P}_2 = \mathrm{X} - \mathrm{X}^2$ sont deux polynômes non colinéaires (coefficients non proportionnels) donc linéairement indépendant. Ainsi, $(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_)$ est une base de F et $\dim \mathrm{F} = 2$

g) F est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$

Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on résout l'équation différentielle : l'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r-1)^2 = 0 \Leftrightarrow r = 1$

Aussi : $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\Big([t \mapsto e^t], [t \mapsto te^t]\Big)$ (autrement dit : $y \in \mathrm{F} \Leftrightarrow \exists (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = (\mathrm{A}t + \mathrm{B})e^t = \mathrm{A}te^t + \mathrm{B}e^t$)

Les deux fonctions sont non colinéaires à cause de l'évaluation en $t = 0$ donc $\Big([t \mapsto e^t], [t \mapsto te^t]\Big)$ est une base de F et $\dim \mathrm{F} = 2$

h) F est l'ensemble des suites réelles vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_n$

Dans le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, les vecteurs de F vérifie une relation de récurrence linéaire double.
L'équation caractéristique est $r^2 = 2 \Leftrightarrow r = \pm\sqrt{2}$ aussi le terme général vaut

$$u \in \mathrm{F} \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a(\sqrt{2})^n + b(-\sqrt{2})^n$$

Définissons les suites $v = \Big((\sqrt{2})^n\Big)_{n \in \mathbb{N}}$ et $w = \Big((-\sqrt{2})^n\Big)_{n \in \mathbb{N}}$ alors : $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(v, w)$

Comme $(v_0, v_1) = (1, \sqrt{2})$ n'est pas proportionnel à $(w_0, w_1) = (1, -\sqrt{2})$, les suites v et w sont non colinéaires et la famille (v, w) est aussi libre. C'est donc une base de F et $\dim \mathrm{F} = 2$

i) F est l'ensemble des suites réelles vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1}$

L'équation caractéristique est $r^2 = 2r \Leftrightarrow r = 0$ ou $r = 2$ de sorte que, dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

$$u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathrm{F} \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \begin{cases} a+b & \sin = 0 \\ b2^n & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$$

Définissons les suites v avec $v_0 = 1$ et $v_n = 0$ si $n \geqslant 1$ et $w = \Big(2^n\Big)_{n \in \mathbb{N}}$ alors : $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(v, w)$

Comme $(v_0, v_1) = (1, 0)$ n'est pas proportionnel à $(w_0, w_1) = (1, 2)$, les suites v et w sont non colinéaires et la famille (v, w) est aussi libre. C'est donc une base de F et $\dim \mathrm{F} = 2$

EXEMPLE N° 2 Dans $\mathbb{R}[X]$, on définit $e_1 = 1$, $e_2 = 1+X$, $e_3 = (1+X)^2$ et $e_4 = (1+X)^3$

1. Prouver que $\mathscr{B}' = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$. Quel espace connu E engendre-t-elle ?

La famille $\mathscr{B}'$ est une famille de polynômes non nul à degrés échelonnés donc c'est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.

De plus, $\begin{cases} \text{les 4 polynômes de } \mathscr{B}' \text{ sont dans } \mathbb{R}_3[X] \\ \mathscr{B}' \text{ est libre} \\ \text{Card}(\mathscr{B}') = 4 = \dim \mathbb{R}_3[X] \end{cases} \Leftrightarrow \mathscr{B}'$ une base de $\mathbb{R}_3[X]$ et ainsi $\text{Vect}(\mathscr{B}') = \mathbb{R}_3[X] = E$

2. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de E. Donner les matrices de passage entre les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.

Par définition, on a : $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

puisqu'on a : $1 = e_1$, $X = -1 + (1+X) = -e_1 + e_2$, $X^2 = (1+X)^2 - 2X - 1 = -e_1 - 2(-e_1 + e_2) + e_3 = e_1 - 2e_2 + e_3$
et $X^3 = (1+X)^3 - 3X^2 - 3X - 1 = e_4 - 3(e_1 - 2e_2 + e_3) - 3(e_2 - e_1) - e_1 = -e_1 + 3e_2 - 3e_3 + e_4$

3. En déduire une primitive de $\left[f : x \mapsto (x^3 + 2x^2)(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]$

Exprimons le polynôme $X^3 + 2X^2$ de $\mathbb{R}_3[X]$ dans la base $\mathscr{B}'$: on sait que $X^3 + 2X^2$ de coordonnées $(0,0,2,1)$ dans la base canonique est de coordonnées $P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathscr{B}'$. Dés lors :

$X^3 + 2X^2 = 1 \times 1 - 1 \times (1+X) - 1 \times (1+X)^2 + (1+X)^3$

puis : $f(x) = (1+x)^{\frac{3}{2}} - (1+x) \times (1+x)^{\frac{3}{2}} - (1+x)^2 \times (1+x)^{\frac{3}{2}} + (1+x)^3 \times (1+x)^{\frac{3}{2}} = (1+x)^{\frac{3}{2}} - (1+x)^{\frac{5}{2}} - (1+x)^{\frac{7}{2}} + (1+x)^{\frac{9}{2}}$

et donc une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ est d'expression : $F(x) = \dfrac{2}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}} - \dfrac{2}{7}(1+x)^{\frac{7}{2}} - \dfrac{2}{9}(1+x)^{\frac{9}{2}} + \dfrac{2}{11}(1+x)^{\frac{11}{2}}$

On utilise ici : $u' \times u^{\alpha} = \left(\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)'$ *avec* $u(x) = 1+x$

EXEMPLE N° 2.5 Soient $u = (1,-1,1)$, $v = (0,-1,2)$ et $w = (1,-2,3)$ trois éléments de $\mathbb{R}^3$.

1) Donner une base de $F = \text{Vect}(u, v, w)$.
2) Soit $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$. Montrer que G est un sev de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base.
3) Montrer que $F = G$.
4) On note $\mathscr{B}_1 = (u, v)$ et $\mathscr{B}_2 = (a, b)$ où $a = (1,0,-1)$ et $b = w$. Justifier que $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ sont des bases de F
Donner les coordonnées X_1 et X_2 de $(2,1,-4)$ dans $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$
5) Expliciter les matrices de passages entre $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$.

1. On a $w = u + v$ donc $F = \text{Vect}(u, v)$. Or (u, v) est clairement libre, donc c'est une base de F et $\dim F = 2$
2. $G = \{(x, y, -x-2y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1,0,-1) + y(0,1,-2) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\big((1,0,-1),(0,1,-2)\big)$ donc G est un sev de $\mathbb{R}^3$ et, puisque $u_1 = (1,0,-1)$ et $v_1 = (0,1,-2)$ sont non colinéaires, (u_1, v_1) est une base de G
3. On a $G = \text{Vect}(u - v, -v) \subset \text{Vect}(u, v) = F$. Or F et G ont même dimension ($\dim F = \dim G = 2$) donc $F = G$.
4. $\mathscr{B}_1$ est génératrices de F à 2 vecteurs or F est de dimension 2 donc $\mathscr{B}_1$ est une base de F
$\mathscr{B}_2$ est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires dans un espace de dimension 2 donc c'est aussi une base de F. De plus : $(2,1,-4) = 2u - 3v = \frac{5}{2}a - \frac{1}{2}b$ donc $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{2} \\ -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$
5. On a : $\begin{cases} a = u - v \\ b = u + v \end{cases}$ et : $\begin{cases} u = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \\ v = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \end{cases}$ d'où $\text{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = P_{\mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_2}$ et $\text{Mat}_{\mathscr{B}_2}(\mathscr{B}_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = P_{\mathscr{B}_2 \to \mathscr{B}_1}$

EXEMPLE N° 3 Soient $F = \left\{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\right\}$ et $G = \left\{(2a - b + c)X^2 + (b + a + 2c)X + a + b + 2c) \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\right\}$

1. Prouver que F et G sont des sev de $\mathbb{R}_2[X]$

Dans $\mathbb{R}_2[X]$: $F = \left\{(X-1)(aX+b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{a(X^2 - X) + b(X-1) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathrm{Vect}(X^2 - X, X - 1)$.
On a utilisé ici la caractérisation d'une racine dans $\mathbb{R}[X]$ *:* $P(a) = 0 \Leftrightarrow X - a$ *divise* P

$G = \left\{a(2X^2 + X + 1) + b(-X^2 + X + 1) + c(X^2 + 2X + 2) \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathrm{Vect}(2X^2 + X + 1, -X^2 + X + 1, X^2 + 2X + 2)$.

aussi F et G sont des sev de $\mathbb{R}_2[X]$ puisqu'ils sont des sous-espace vectoriels engendrés par des familles de vecteurs.

2. Déterminer une base de F et une base de G.

On connaît une famille génératrice de chacun de ces sev. Étudions le caractère libre pour chacune d'elles.

$P_1 = X^2 - X$ et $P_2 = X - 1$ sont non nuls à degrés échelonnés donc (P_1, P_2) est libre et c'est une base de F.

Si $Q_1 = 2X^2 + X + 1$, $Q_2 = -X^2 + X + 1$ et $Q_3 = X^2 + 2X + 2$ alors $Q_1 + Q_2 = Q_3$ d'où $G = \mathrm{Vect}(Q_1, Q_2, Q_3) = \mathrm{Vect}(Q_1, Q_2)$
Q_1 et Q_2 sont non colinéaires (coefficients non proportionnels) donc (Q_1, Q_2) est libre et c'est une base de G.

3. Déterminer une base de $F + G$ et, en déduire $F + G = \mathbb{R}_2[X]$

On obtient une famille génératrice de $F + G$ en concaténant des bases respectives de F et de G.
La famille (P_1, P_2, Q_1, Q_2) génératrice de $F + G$ est nécessairement liée (puisque $F + G$ est un sev de $\mathbb{R}_2[X]$ donc $\dim(F + G) \leqslant 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$). On ne voit pas de combinaisons linéaires nulles simples sur ces vecteurs :

$$\forall(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4, \alpha(X^2 - X) + \beta(X-1) + \gamma(2X^2 + X + 1) + \delta(-X^2 + X + 1) = 0_{\mathbb{R}[X]} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \quad + 2\gamma - \delta = 0 \\ -\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0 \\ -\beta + \gamma + \delta = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \alpha \quad + 2\gamma - \delta = 0 \\ \beta + 3\gamma \quad = 0 \\ -\beta + \gamma + \delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -6\gamma \\ \beta = -3\gamma \\ \delta = -4\gamma \end{cases}$$

Pour $\gamma = 1$, on obtient la relation $-6P_1 - 3P_2 + Q_1 - 4Q_2 = 0$ de sorte que
$F + G = \mathrm{Vect}(P_1, P_2, Q_1, Q_2) = \mathrm{Vect}(P_1, P_2, Q_2)$ et on vérifie que la famille (P_1, P_2, Q_2) est libre :

$$\forall(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3, \alpha(X^2 - X) + \beta(X-1) + \gamma(-X^2 + X + 1) = 0_{\mathbb{R}[X]} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \gamma = 0 \\ -\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -\beta + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

<u>Remarque</u> : Comme il s'agit d'étudier l'indépendance linéaire de 3 vecteurs dans un espace de dimension 3, on pouvait aussi utiliser un déterminant : (P_1, P_2, Q_2) libre $\Leftrightarrow \det_{(1,X,X^2)}(P_1, P_2, Q_2) \neq 0$ or

$$\det_{(1,X,X^2)}(P_1, P_2, Q_2) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_0}{=} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =_{\text{selon } C_1} \underbrace{+1}_{=(-1)^{3+1}} \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Connaissant une base de $F + G$, on connaît sa dimension : $\dim(F + G) = 3$

Mais alors : $\begin{cases} F + G \subset \mathbb{R}_2[X] \\ \dim(F + G) = 3 = \dim \mathbb{R}_2[X] \end{cases} \Rightarrow F + G = \mathbb{R}_2[X]$

4. Déterminer $\dim(F \cap G)$.

Avec la formule de Grassman : $\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F + G) = 2 + 2 - 3 = 1$

5. Donner une base de $F \cap G$ et donner un supplémentaire de $F \cap G$ dans F.

$$P \in F \cap G \Leftrightarrow \underbrace{\exists(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ P = (2a - b)X^2 + (b + a)X + a + b}_{P \in G = \mathrm{Vect}(Q_1, Q_2)} \quad \text{et} \quad \underbrace{P(1) = 0}_{P \in F}$$

$$\Leftrightarrow \exists(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ P = (2a - b)X^2 + (b + a)X + a + b) \quad \text{et} \quad b = -4a$$

$$\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R},\ P = 3a(2X^2 - X - 1) \quad \text{de sorte qu'on a} \quad F \cap G = \mathrm{Vect}(\underbrace{2X^2 - X - 1}_{=Q})$$

Ce vecteur Q non nul constitue à lui seul une base de la droite vectorielle $F \cap G$

Pour obtenir un supplémentaire, on complète cette base en une base de F : il suffit de prendre n'importe quel vecteur de F non colinéaire à Q. Par exemple, $(Q, P_1) = (2X^2 - X - 1, X - 1)$ est une famille libre de F (non nul à degré échelonnés) contenant 2 vecteurs de F avec $\dim F = 2$ donc c'est une base de F et $S_1 = \mathrm{Vect}(X - 1)$ est un supplémentaire de $F \cap G$ dans F.