

EXEMPLE N°5

Donner le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et des produits de ces matrices.

- On note C_j la colonne j de la matrice A et A est associée canoniquement à une application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

On a : $\text{Im } A = \text{Vect}(C_1, C_2, C_3) = \text{Vect}(C_1)$ car $C_2 = 2C_1$ et $C_3 = 3C_1$ ainsi : $\boxed{\text{Im } A = \text{Vect}((1, 1)) = \text{Im } A}$

et donc $\text{rg}(A) = 1$ de sorte que, par le théorème du rang : $\dim \text{Ker } A = \dim \mathbb{R}^3 - \text{rg}(A) = 2$

On cherche alors deux vecteurs non colinéaires dans $\text{Ker } A$ pour en obtenir une base :

$$2C_1 - C_2 = 0 \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (2, -1, 0) \in \text{Ker } A \text{ et, de même : } (3, 0, -1) \in \text{Ker } A \text{ car } 3C_1 - C_3 = 0$$

Les deux vecteurs étant non colinéaire, on a :

$$\boxed{\text{Ker } A = \text{Vect}((2, -1, 0), (3, 0, -1))}$$

- B est associée canoniquement à $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ et, les deux colonnes de B étant non colinéaires, on a :

$$\boxed{\text{Im } B = \text{Vect}((1, -1, 0), (0, -1, 1))} \text{ et le rang de } B \text{ vaut } 2.$$

Par le théorème du rang : $\dim \text{Ker } B = \dim \mathbb{R}^2 - \text{rg}(B) = 2 - 2 = 0$ donc $\boxed{\text{Ker } B = \{(0, 0)\}}$

- $C = AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ associée canoniquement à $h = f \circ g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. On note C_j la colonne j de C .

$$\text{Im } C = \text{Vect}(C_1, C_2) = \text{Vect}(C_2) \Leftrightarrow \boxed{\text{Im } C = \text{Vect}((1, 1))} \text{ et } \text{rg}(C) = 1$$

Par le théorème du rang : $\dim \text{Ker } C = \dim \mathbb{R}^2 - \text{rg}(C) = 2 - 1 = 1$ et il suffit de trouver un seul vecteur non nul du noyau pour en obtenir une base. Or : $C_1 + C_2 = 0 \Leftrightarrow C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ aussi : $\boxed{\text{Ker } C = \text{Vect}((1, 1)) = \text{Im } C}$

- $D = BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ est associée canoniquement à $u = g \circ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. On note C_j la colonne j de D .

On remarque que : $C_2 = 2C_1$ et $C_3 = 3C_1$ donc $\text{Im } D = \text{Vect}(C_1, C_2, C_3) = \text{Vect}(C_1) = \boxed{\text{Vect}((1, -2, 1)) = \text{Im } A}$

Alors $\text{rg}(A) = 1$ et, par le théorème du rang : $\dim \text{Ker } A = \dim \mathbb{R}^3 - \text{rg}(A) = 2$

On obtient une base de $\text{Ker } A$ en trouvant deux vecteurs non colinéaires dans $\text{Ker } A$ or :

$$2C_1 - C_2 = 0 \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } 3C_1 - C_2 = 0 \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ aussi } \boxed{\text{Ker } D = \text{Vect}((2, -1, 0), (3, 0, -1))}$$

EXEMPLE N°7

Préciser le noyau et l'image des endomorphismes f et g de $\mathbb{R}_3[X]$ tels que f vérifie $\forall P \in \mathbb{R}_3[X], f(P) = P(1) - P(1)X + P(-1)X^2 - P(-1)X^3$

$$g \text{ est canoniquement associée à } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- On vérifie que f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$: f est linéaire (à faire) et

$$f(1) = 1 - X + X^2 - X^3, \quad f(X) = 1 - X - X^2 + X^3, \quad f(X^2) = 1 - X + X^2 - X^3 \text{ et } f(X^3) = 1 - X - X^2 + X^3 \text{ sont tous dans } \mathbb{R}_3[X]$$

La matrice canoniquement associée à f est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ dont on note C_j la colonne j

On sait que : $\text{Im } A = \text{Vect}(C_1, C_2, C_3, C_4) = \text{Vect}(C_1, C_2)$ car $C_1 = C_3$ et $C_2 = C_4$

Comme C_1 et C_2 sont non colinéaires, $\text{rg}(A) = 2$ et (C_1, C_2) base de $\text{Im } A$

$$\text{De plus : } C_1 = C_3 \Leftrightarrow f(1) = f(X^2) \Leftrightarrow f(1 - X^2) = 0 \text{ OU BIEN } C_1 - C_3 = 0 \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1, 0, -1, 0) \in \text{Ker } A$$

De même : $f(X - X^3) = 0$ OU $(0, 1, 0, -1) \in \text{Ker } A$

Finalement : $\text{Im } f = \text{Vect}(\underbrace{1 - X + X^2 - X^3}_{P_1}, \underbrace{1 - X - X^2 + X^3}_{P_2})$ est de dimension 2 et $(\underbrace{1 - X}_{1/2(P_1 + P_2)}, \underbrace{X^2 - X^3}_{1/2(P_1 - P_2)})$

Par le théorème du rang, $\text{Ker } f$ est de dimension $\dim \mathbb{R}_3[X] - \text{rg } f = 4 - 2 = 2$ et la famille $(1 - X^2, 1 - X^3)$ est une famille libre (car à degrés échelonnés) de deux vecteurs de $\text{Ker } f$ donc c'est une base de $\text{Ker } f$

- Pas de relation "simple" sur les colonnes. On utilise le noyau :

$$(x, y, z, t) \in \text{Ker } A \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + y - z + t = 0 \\ -x + y - z + t = 0 \\ x + 2y + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ -y + 3z - 2t = 0 \\ 2y - 2z + 2t = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y + z - t = 0 \\ z + 3z - 2(2z) = 0 \\ t = z - y = 2z \\ y = -z \end{cases}$$

soit $\text{Ker } A = \text{Vect}((0, -1, 1, 2))$ puis $\text{Ker } f = \text{Vect}(2X^3 + X^2 - X)$

Par le théorème du rang, $\dim \text{Im } f = \dim \text{Im } A = 4 - \dim \text{Ker } A = 3$ On cherche donc une famille libre constituée de 3 colonnes de la matrice qui sera une base de $\text{Im } A$.

En notant C_j la colonne j de la matrice, $(C_1 - C_2 - C_3, C_4) = ((0, 1, -1, -1), (1, -1, -1, 0), (0, 1, 1, 1))$ car :

$$\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \quad \alpha(C_1 - C_2 - C_3) + \beta C_3 + \gamma C_4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ -\alpha - \beta + \gamma = 0 \\ -\alpha + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ 2\gamma = 0 \\ \alpha = \beta = \gamma = 0 \end{cases}$$

Une base de $\text{Im } f$ est donc $(X - X^2 - X^3, 1 - X - X^2, X + X^2 + X^3)$

On considère l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

1. Quel est le degré de $f(1,1,0)$?

Matriciellement : $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow f(1,1,0) = 5 \times 1 + 0 \times X + 0 \times X^2 = 5$ est le polynôme constant à 5 de degré 0

Attention au SENS de ce que vous écrivez!

OU BIEN : $f(1,1,0) = f(1,0,0) + f(0,1,0) = (3 + X + 2X^2) + (2 - X - 2X^2) = 5$

2. Justifier que f est un isomorphisme en utilisant l'algorithme du pivot de Gauss.

f est un isomorphisme si la matrice A est inversible. On utilise l'algorithme du pivot de Gauss :

$$A \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 - L_2 - 3L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 - L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 - L_2 - 4L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 - L_2 \times \frac{1}{5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 - L_3 \times -1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. On admet que $A^3 - 3A^2 + A - 5I_3 = 0$. Retrouver d'une autre façon que f est un isomorphisme.

On cherche toujours à obtenir que A est une matrice inversible mais on utilise cette fois les équivalences :

$A \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible $\Leftrightarrow \exists B \in M_n(\mathbb{K}), AB = I_n \Leftrightarrow \exists B \in M_n(\mathbb{K}), BA = I_n$

Pour cela, on isole la matrice identité : $A^3 - 3A^2 + A - 5I_3 = 0 \Leftrightarrow 5I_3 = A^3 - 3A^2 + A \Leftrightarrow I_3 = \frac{1}{5}(A^2 - 3A + I_3) \times A$

d'où A inversible et $A^{-1} = \frac{1}{5}(A^2 - 3A + I_3)$ **Attention à l'erreur classique de SENS : $A = I_3 \times A$ et pas $1 \times A$**

4. Quel est antécédent du polynôme $1 + 2X + 3X^2$ par f ? $A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ soit $f^{-1}(1 + 2X + 3X^2) = (\frac{4}{5}, -\frac{1}{5}, 1)$

On considère l'application f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$

Ici : $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ aussi $\text{Ker } f = \text{Ker } A$ et $\text{Im } f = \text{Im } A$ par définition du noyau et de l'image d'une matrice.

Or : $\text{Im}(A) = \text{Vect}(C_1, C_2, C_3) = \text{Vect}(C_1)$ car $C_2 = C_1$ et $C_3 = C_1$ où C_j est la colonne j de A donc $\text{rg}(f) = 1$

Par le théorème du rang : $\dim \text{Ker } f = \dim \mathbb{R}^3 - \text{rg}(f) = 3 - 1 = 2$ et on obtient une base de $\text{Ker}(f)$ à l'aide de deux vecteurs de $\text{Ker}(f)$ non colinéaire. On utilise les relations liant les colonnes :

$$C_1 - C_2 = 0 \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow u = (1, -1, 0) \in \text{Ker } A = \text{Ker } f \quad C_1 - C_3 = 0 \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow v = (1, 0, -1) \in \text{Ker } A = \text{Ker } f$$

Ainsi : $\{u, v\}$ est une base de $\text{Ker } f$ où $u = (1, -1, 0)$ et $v = (1, 0, -1)$

2. Déterminer une base de $\text{Ker}(f - 3id)$

$f - 3id$ est canoniquement associée à $A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

On repère que $C_1 + C_2 + C_3 = 0$ où C_j est la colonne j de $A - 3I_3$ aussi $\text{Im}(A - 3I_3) = \text{Vect}(C_1, C_2, C_3) = \text{Vect}(C_1, C_2)$

Or, C_1 et C_2 sont non colinéaire d'où $\text{rg}(f - 3id) = \text{rg}(A - 3I_3) = 2$. Par le théorème du rang :

$\dim \text{Ker}(f - 3id) = \dim \mathbb{R}^3 - \text{rg}(f) = 3 - 2 = 1$ et il suffit de trouver un vecteur dans $\text{Ker}(f - 3id)$ pour en obtenir une base Ici : $C_1 + C_2 + C_3 = 0 \Leftrightarrow w = (1, 1, 1) \in \text{Ker}(f - 3id)$ et $w = (1, 1, 1)$ est une base de $\text{Ker}(f - 3id)$

3. En déduire une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ où la matrice de f est diagonale, notée D

$u \in \text{Ker } f \Leftrightarrow f(u) = 0 \quad v \in \text{Ker } f \Leftrightarrow f(v) = 0 \quad \text{et}$

$w \in \text{Ker}(f - 3id) \Leftrightarrow (f - 3id)(w) = 0 \Leftrightarrow f(w) - 3w = 0 \Leftrightarrow f(w) = 3w$

Si $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(u), f(v), f(w)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = D$

Comme $\text{Card}(\mathcal{B}') = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, il suffit de vérifier que $\mathcal{B}'$ est libre pour obtenir que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$:

$$\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \alpha u + \beta v + \gamma w = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -\alpha + \gamma = 0 \\ -\beta + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \gamma \\ \alpha = \gamma \\ \beta = \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

En définitive, $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est bien une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.

4. Expliciter la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathcal{B}'$ et la relation liant A, D et P

Par définition, si on note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$: $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

La relation de changement de bases s'écrit, d'après le cours : $D = P^{-1}AP$

Point méthode : projecteur/symétrie

- Si on vous demande de reconnaître géométriquement un endomorphisme f remarquable, il s'agit alors d'identifier une homothétie, une projection ou une symétrie (éventuellement orthogonale à suivre) ou enfin une rotation (à suivre) en utilisant les caractérisations du cours qu'on vérifie, en général, à l'aide d'une matrice A de f (soit donnée par le sujet soit qu'on commence par déterminer dans une base simple canonique par ex). On n'oublie pas :
 - 1) de souligner que l'application f est un endomorphisme (il suffit bien souvent de l'écrire)
 - 2) de traduire sur f le calcul matriciel : $A^2 = A \Leftrightarrow f \circ f = f$ ou $A^2 = f \circ f = id$
 - 3) de bien donner les caractéristiques géométriques :
 - le rapport pour une homothétie
 - projecteur sur ... parallèlement à ...
 - symétrie par rapport à ... parallèlement à ...
 - rotation d'axe ... et d'angle ...
- Si on vous demande de donner la matrice dans une base $\mathcal{B}$ d'un endomorphisme f remarquable, il s'agit d'abord de déterminer la matrice A' dans une base $\mathcal{B}'$ adaptée à l'endomorphisme (celle adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$ pour le projecteur sur F parallèlement à G par exemple) puis de réaliser un changement de bases pour obtenir la matrice voulu (avec la relation de changement de bases $A' = P^{-1}AP$ avec $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$)

EXEMPLE N° 10

Dans $\mathbb{R}^4$ où on note (x, y, z, t) les coordonnées dans la base canonique.

- Identifier géométriquement l'endomorphisme q canoniquement associé à la matrice $Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D'abord, d'après le sujet, $q \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ (puisque associée à une matrice de $M_4(\mathbb{R})$)

et on vérifie que $Q^2 = Q \Leftrightarrow q \circ q = q$ donc q est un projecteur de $\mathbb{R}^4$.

On sait que q est le projecteur sur $\text{Im } q = \text{Im } Q$ parallèlement à $\text{Ker } q = \text{Ker } Q$ (car matrice canoniquement associée à $q \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$). Précisons l'image et le noyau: on note C_i la colonne i de la matrice Q

$\text{Im } q = \text{Im } Q = \text{Vect}(C_1, C_2, C_3, C_4) = \text{Vect}(C_1, C_4)$ avec (C_1, C_4) libre puisque $C_1 + C_3 = 0 = C_2$ donc $\text{rg}(q) = 2$

Par le théorème du rang: $\dim \text{Ker } q = 4 - 2 = 2$ et les relations $C_1 + C_3 = 0$ et $C_2 = 0$ donnent que $(1, 0, -1, 0)$ et $(0, 1, 0, 0)$ sont dans $\text{Ker } q$. Ces vecteurs étant non colinéaires, ils forment une base de $\text{Ker } q$

q est le projecteur sur $\text{Im } q = \text{Vect}((2, 2, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ parallèlement à $\text{Ker } q = \text{Vect}((1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, 0))$

On considère le sous-espace vectoriel F donné par les équations $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - t = 0 \end{cases}$ et $G = \text{Vect}((1, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1))$

Prouver que F et G sont supplémentaires.

Préciser la matrice du projecteur p sur F parallèlement à G dans la base canonique.

$(x, y, z, t) \in F \Leftrightarrow (x, y, z, t) = (x, -x, z, x) = x(1, -1, 0, 1) + z(0, 0, 1, 0)$ d'où $F = \text{Vect}((1, -1, 0, 1), (0, 0, 1, 0))$

Les familles $((1, -1, 0, 1), (0, 0, 1, 0))$ et $((1, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1))$ sont libres car constituées de 2 vecteurs non colinéaires aussi $\dim F = \dim G = 2$

En outre: $(x, y, z, t) \in F \cap G \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - t = 0 \end{cases}$ et $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, (x, y, z, t) = (a, a, -b, b)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 0 \\ a - b = 0 \end{cases}$ et $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, (x, y, z, t) = (a, a, -b, b) \Leftrightarrow (x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)$

Ainsi: $\begin{cases} F \cap G = \{(0, 0, 0, 0)\} \\ \dim F + \dim G = \dim \mathbb{R}^4 \end{cases} \Leftrightarrow F \oplus G = \mathbb{R}^4$ autrement dit F et G sont supplémentaires

On pose: $\epsilon_1 = (1, -1, 0, 1), \epsilon_2 = (0, 0, 1, 0), \epsilon_3 = (1, 1, 0, 0)$ et $\epsilon_4 = (0, 0, -1, 1)$

$\mathcal{B}' = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4)$ est une base adaptée à $E = F \oplus G$ dans laquelle le projecteur p pour matrice $\Delta = \text{diag}(1, 1, 0, 0)$

On connaît la matrice de passage P entre la base canonique et $\mathcal{B}'$: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Par la formule de changement de bases: $\Delta = P^{-1}AP$ où A est la matrice cherchée soit $A = P\Delta P^{-1}$

Calcul de P^{-1} : $\begin{cases} \epsilon_1 = e_1 - e_2 + e_4 \\ \epsilon_2 = e_3 \\ \epsilon_3 = e_1 + e_2 \\ \epsilon_4 = -e_3 + e_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_3 - e_1 = 2e_2 - e_4 \\ e_3 = e_2 \\ e_1 = e_3 - e_2 \\ e_4 = e_2 + e_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_2 = \frac{1}{2}(e_3 - e_1 + e_2 + e_4) \\ e_1 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3 - e_4) \\ e_4 = e_2 + e_4 \end{cases}$

soit $P^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ puis $A = P\Delta P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$

Donner la matrice S dans la base canonique de la symétrie par rapport à F parallèlement à G .

Rappel: si $x = x_F + x_G, p(x) = x_F - x_G = 2x_F - (x_F + x_G) = 2p(x) - x$ aussi $S = 2A - I_4$

Justifier qu'il existe une matrice inversible P qu'on précisera telle que $P^{-1}SP = D$

On reconnaît une formule de changement de bases où D est la base adaptée à la symétrie.

La base $\mathcal{B}'$ est adaptée à la symétrie car (ϵ_1, ϵ_2) est une base de F et (ϵ_3, ϵ_4) une base de G .

En utilisant la matrice P de passage entre les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ calculée précédemment, on trouve bien $P^{-1}SP = D$

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$