PROGRAMME DE KHÔLLE DE LA SEMAINE N°9

L'oral commencera avec une question de cours issue de la la liste des questions de cours associée à ce programme et sera évaluée sur 4 points. La réponse à cette question de cours doit être rapide et précise! (Pas plus de 20 minutes)

- **Cours** :

CHAPITRE II COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

La totalité du chapitre et, en particulier :

II-1) Sous-espace vectoriel stable

Les élèves doivent :

— savoir définir les notions de sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme et d'endomorphisme induit associé à un sev stable

— pouvoir caractériser matriciellement en dimension finie la stabilité d'un sev par un endomorphisme par la présence d'un bloc nul dans la matrice de l'endomorphisme dans une base adaptée

On pourra consulter le TD n° 2 du chapitre 2 sur les notions de sev stable et de sommes directes.

III) Hyperplans

Les élèves doivent :

— connaître la définition d'un hyperplan (sev admettant une droite vectorielle comme supplémentaire) et la caractérisation des hyperplans en dimension finie (sev de dimension $\dim E - 1$)

— savoir qu'un hyperplan de E est caractérisé dans une base de E par une équation
$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ avec $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$ fixé dans $\mathbb{K}^n$ où $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées d'un vecteur dans la base.

— savoir qu'une intersection de p hyperplans est un sev de dimension au moins $n-p$ et qu'un sev de dimension $n-p$ est une intersection de p hyperplans (traduction en termes de système d'équations pour un sev)

On pourra consulter le TD n° 3 du chapitre 2 sur les notions d'hyperplans.

IV) Trace d'une matrice carrée

Les élèves doivent :

— définir la trace d'une matrice carrée et savoir qu'elle réalise une application linéaire de $M_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$

— connaître et démontrer le résultat sur la trace d'un produit

— savoir que la trace est invariante par transposition

V) Déterminant d'une matrice carrée

V-1) Définition du déterminant

Les élèves doivent :

— connaître la définition du déterminant sur $M_n(\mathbb{K})$ (forme n-linéaire alternée sur les colonnes valant 1 sur I_n, existence et unicité admise)

— connaître les notations $\det A$ et $\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$

— savoir que cette définition coïncide avec les définitions géométriques du déterminants vu en géométrie en PTSI.
En particulier, ils doivent connaître les interprétations en terme d'aire (resp. de volume) de $|\det A|$ par rapport aux vecteurs colonnes de A si A est d'ordre 2 (resp 3).

V-2) Propriétés du déterminant

Les élèves doivent :

— savoir que le déterminant est invariant par transposition (admis)

— identifier un déterminant nul parce la famille des colonnes (des lignes) est liées (en particulier si l'une est nulle ou s'il y en a deux colinéaires)

— connaître les conséquences d'opérations sur les colonnes ou les lignes d'un déterminant

— pouvoir caractériser l'inversibilité d'une matrice avec un déterminant et relier $\det(A)$ et $\det(A^{-1})$

V-3) Calcul du déterminant par développement

Les élèves doivent :
- savoir calculer un déterminant par développement suivant une ligne ou une colonne (résultat admis)
- savoir calculer le déterminant d'une matrice triangulaire

V-4) Déterminant d'une famille de vecteurs

Les élèves doivent :
- définir le déterminant d'une famille de n vecteurs dans une base d'un espace vectoriel de dimension n
- pouvoir caractériser les bases avec un déterminant
- utiliser un déterminant pour rechercher l'équation d'un hyperplan.

On pourra consulter le TD n° 4 et le TD n°5 sur les déterminants

VI) Matrices semblables

VI-1) Définition et caractérisation III-2) Trace et déterminant d'un endomorphisme

Les élèves doivent :
- pouvoir définir la relation de similitude entre 2 matrices carrées et savoir que c'est une relation d'équivalence
- savoir que deux matrices semblables représentent le même endomorphismes dans des bases différentes
- savoir que le rang, la trace et le déterminant sont les mêmes pour deux matrices semblables
- définir la trace, le déterminant d'un endomorphisme comme ceux de sa matrice dans une base quelconque

CHAPITRE III Compléments sur les séries numériques

I) L'essentiel de la PTSI sur les séries numériques

Les élèves doivent
- connaître et maîtriser le vocabulaire et les notations usuels des séries (terme général, somme partielle, série convergente/divergente, nature d'une série, somme, reste)
- connaître, reconnaître et utiliser les résultats sur les séries de référence (télescopique, géométrique, Riemann)
- connaître et utiliser les théorèmes sur la convergence des séries numériques (divergence grossière, opérations, série à termes positif, comparaison par inégalités, critère d'équivalence)

II) Résultats sur les séries absolument convergente

II-1) Convergence absolue

Les élèves doivent
- pouvoir définir la convergence absolue d'une série et savoir qu'elle entraîne la convergence de la série
- utiliser le résultat dit d'inégalités triangulaires sur la somme des séries lorsqu'une série converge absolument
- connaî tre un exemple de série qui converge sans converger absolument :

Exemple de la série harmonique alternée $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n}{n}$ avec détermination de la somme

II-2) Les théorèmes de convergence absolue

Les élèves disposent
- d'un résultat de comparaison et d'un critère d'équivalence pour la convergence absolue
- de la règle du « grand O »ou du « petit o »à utiliser en particulier pour mener une comparaison avec une série de Riemann ou une série géométrique
- de la règle de d'Alembert.

  A cette occasion, $e^z=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{z^n}{n!}$ a été définie pour tout $z\in\mathbb{C}$. Le lien avec la définition de PTSI $e^z=e^{\Re e(z)}e^{i\Im m(z)}$ est admis.

On pourra consulter la carte mentale pour l'étude d'une série

Attention ! Pas de produit de Cauchy cette semaine

Attention ! Pas de comparaison série/intégrale et pas de série alternée cette semaine.

I) *Équations différentielles linéaires d'ordre 1 (Rappels et compléments PTSI)*

Les élèves doivent :
- identifier une équation différentielle linéaire d'ordre 1 (EDL_1), identifier la variable, les coefficients et le second membre et identifier si elle est résolue en y'
- connaître la structure algébrique de l'ensemble des solutions

$$\mathscr{S} = y_p + \text{Vect}(h) \text{ où } \begin{cases} y_p \text{ est une solution particulière} \\ h \text{ est une solution homogène non nulle} \end{cases} \quad \text{lorsque l'équation est résolue en } y'$$

- savoir déterminer l'ensemble des solutions de $y' + a(t)y = 0$
- connaître le principe de superposition des solutions
- savoir déterminer les solutions de $y' + a(t)y = b(t)$ par la méthode de variation de la constante
- connaître la notion de problème de Cauchy et l'unicité de la solution associée
- pouvoir mener un recollement de solutions à l'aide d'un raisonnement par analyse/synthèse en exploitant, par exemple, les développements limités pour caractériser la dérivabilité ponctuelle d'une solution.

II) *Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants (Rappels PTSI)*

Les élèves doivent :
- identifier une équation différentielle linéaire d'ordre 2 (EDL_2) à coefficients constants (éventuellement avec un paramètre), identifier la variable, les coefficients et le second membre et identifier si elle est résolue en y''
- identifier une EDL_2 à coefficients constants et déterminer l'ensemble des solutions homogènes à l'aide d'une équation caractéristique
- connaître, dans le cas d'une EDL_2 à coefficients constants, la règle pour la recherche d'une solution particulière analogue à un second membre du type Ke^{mx} avec K et m des scalaires (éventuellement $K\cos(\omega x)$ ou $K\sin(\omega x)$ en utilisant la partie réelle/imaginaire de $Ke^{i\omega}$)

On pourra consulter le TD n° 1 et le TD n° 2 du chapitre 5

- **Exercices** :

- Tous les exemples et exercices du chapitre II auront été traités.
- Les exemples du cours jusqu'aux calculs de somme (sauf la dernière) après l'exemple 5 du chapitre III ainsi que l'exercice 2 et le 1) de l'exercice 3 auront été traités.
- Tous les exemples et les exercices 1) et 2) du chapitre V auront été traités.

FIN