Programme de khôlle de la semaine n°8

L'oral commencera avec une question de cours issue de la la liste des questions de cours associée à ce programme et sera évaluée sur 4 points. La réponse à cette question de cours doit être rapide et précise! (Pas plus de 20 minutes)

• ***Cours*** : **Chapitre II — Compléments d'algèbre linéaire**

I) Produit de sous-espaces vectoriels

Les élèves doivent :

- savoir définir un produit cartésien de p espaces vectoriels
- savoir qu'un produit cartésien de p espaces vectoriels sur un même corps est un espace vectoriel et préciser les lois et le zéros
- savoir déterminer la dimension d'un produit cartésien de p espaces vectoriels de dimensions finies

II) Somme de sous-espaces vectoriels, somme directe de sous-espaces vectoriels

II-1) Sev supplémentaire dans un espace vectoriel (rappels PTSI)

Les élèves doivent :

- repérer la caractérisation à utiliser pour démontrer que des sev sont supplémentaires (cas $\dim < +\infty$ ou dim quelconque)
- construire une stratégie (utilisation de sev engendré ou d'un retour à la définition pour prouver que F ou G sont des sev,rechercher des bases en $\dim < +\infty$ pour obtenir $\dim F + \dim G = \dim E$, mise en place d'un raisonnement par analyse/synthèse pour prouver $E \subset F + G$ (cas dim qcq))

II-2) Somme d'un nombre fini de sous-espace vectoriel — *II-3) Somme directe de sous-espace vectoriel*

Les élèves doivent :

- savoir définir et utiliser les notions de sommes finie de sous-espace vectoriel et de somme finie directe de sous-espace vectoriel
- caractériser une somme directe par le fait que l'unique décomposition du vecteur nul dans cette somme est triviale
  Attention! C'est la seule caractérisation au programme. Pas de caractérisation avec des intersections
  Les élèves doivent pouvoir toutefois démontrer l'équivalence de cette définition avec la caractérisation $F \cap G = \{0_E\}$ vu dans le cas de deux sev en PTSI.
- définir une base adaptée à une décomposition en somme directe en dimension finie
- connaître le résultat sur la dimension d'une somme directe de sev de dimension finie

On pourra consulter le TD n° 1 du chapitre 2 sur la notion du sev supplémentaires

II-3) Sous-espace vectoriel stable

Les élèves doivent :

- savoir définir les notions de sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme et d'endomorphisme induit associé à un sev stable
- pouvoir caractériser matriciellement en dimension finie la stabilité d'un sev par un endomorphisme par la présence d'un bloc nul dans la matrice de l'endomorphisme dans une base adaptée

On pourra consulter le TD n° 2 du chapitre 2 sur les notions de sev stable et de sommes directes.

III) Hyperplans

Les élèves doivent :

- connaître la définition d'un hyperplan (sev admettant une droite vectorielle comme supplémentaire) et la caractérisation des hyperplans en dimension finie (sev de dimension $\dim E - 1$)
- savoir qu'un hyperplan de E est caractérisé dans une base de E par une équation
  $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ avec $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$ fixé dans $\mathbb{K}^n$ où $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées d'un vecteur dans la base.
- savoir qu'une intersection de p hyperplans est un sev de dimension au moins $n - p$ et qu'un sev de dimension $n - p$ est une intersection de p hyperplans (traduction en termes de système d'équations pour un sev)

On pourra consulter le TD n° 3 du chapitre 2 sur les notions d'hyperplans.

IV) *Trace d'une matrice carrée*

Les élèves doivent :

— définir la trace d'une matrice carrée et savoir qu'elle réalise une application linéaire de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$

— connaître et démontrer le résultat sur la trace d'un produit

— savoir que la trace est invariante par transposition

V) *Déterminant d'une matrice carrée*

V-1) *Définition du déterminant*

Les élèves doivent :

— connaître la définition du déterminant sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ (forme n-linéaire alternée sur les colonnes valant 1 sur I_n, existence et unicité admise)

— connaître les notations $\det \mathrm{A}$ et $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

— savoir que cette définition coïncide avec les définitions géométriques du déterminants vu en géométrie en PTSI.
En particulier, ils doivent connaître les interprétations en terme d'aire (resp. de volume) de $|\det \mathrm{A}|$ par rapport aux vecteurs colonnes de A si A est d'ordre 2 (resp 3).

V-2) *Propriétés du déterminant*

Les élèves doivent :

— savoir que le déterminant est invariant par transposition (admis)

— identifier un déterminant nul parce la famille des colonnes (des lignes) est liées (en particulier si l'une est nulle ou s'il y en a deux colinéaires)

— connaître les conséquences d'opérations sur les colonnes ou les lignes d'un déterminant

— pouvoir caractériser l'inversibilité d'une matrice avec un déterminant et relier $\det(\mathrm{A})$ et $\det(\mathrm{A}^{-1})$

V-3) *Calcul du déterminant par développement*

Les élèves doivent :

— savoir calculer un déterminant par développement suivant une ligne ou une colonne (résultat admis)

— savoir calculer le déterminant d'une matrice triangulaire

V-4) *Déterminant d'une famille de vecteurs*

Les élèves doivent :

— définir le déterminant d'une famille de n vecteurs dans une base d'un espace vectoriel de dimension n

— pouvoir caractériser les bases avec un déterminant

— utiliser un déterminant pour rechercher l'équation d'un hyperplan.

On pourra consulter le TD n° 4 du chapitre 2 et un autre TD sur les déterminants sera fait à la rentrée.

VI) *Matrices semblables*

VI-1) *Définition et caractérisation III-2) Trace et déterminant d'un endomorphisme*

Les élèves doivent :

— pouvoir définir la relation de similitude entre 2 matrices carrées et savoir que c'est une relation d'équivalence

— savoir que deux matrices semblables représentent le même endomorphismes dans des bases différentes

— savoir que le rang, la trace et le déterminant sont les mêmes pour deux matrices semblables

— définir la trace, le déterminant d'un endomorphisme comme ceux de sa matrice dans une base quelconque

• **Exercices** :

Tous les exemples et les exercices du chapitre II auront été traités.

FIN