PROGRAMME DE KHÔLLE DE LA SEMAINE N°6

L'oral commencera avec une question de cours issue de la la liste des questions de cours associée à ce programme et sera évaluée sur 4 points. La réponse à cette question de cours doit être rapide et précise! (Pas plus de 20 minutes)

• **Cours** :

RELATION $\sim$ ET o et DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Les élèves doivent :
- savoir caractériser $f = o_a(g)$ par : $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0$ ou encore $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$
- savoir caractériser $f(x) \sim_a g(x)$ par $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1$ ou encore $f(x) = g(x) + o_a\big(g(x)\big)$
- connaître les équivalents usuels et DL usuels
- connaître les opérations autorisées sur les équivalents (produit, quotient, passage à une puissance, changement de variables)
- savoir réaliser les opérations usuelles (somme, produit, changement de variable simple) sur les développements limités
- savoir « nettoyer » une expression pour trouver un équivalent
- savoir utiliser des DL pour obtenir un équivalent (premier terme non nul du développement limité)
- savoir obtenir un DL par intégration termes à termes (exemple usuel de Arctan, Arcsin à connaître)

On pourra consulter le TD de révision sur l'asymptotique

CHAPITRE I FONCTIONS VECTORIELLES ET COURBES PLANES PARAMÉTRÉES

Rappels de géométrie plane :
- représentation cartésienne d'une droite dans le plan (notion d'équation réduite avec pente et ordonnée à l'origine)
- représentation paramétrique d'une droite dans le plan
- notion de vecteur directeur et de vecteur normal
- passage d'une représentation à l'autre

I) *Fonctions vectorielles d'une variable réelles à valeur dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$*

I-1) *Introduction à la topologie euclidienne de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$*

Les élèves doivent :
- savoir définir et calculer le produit scalaire, la norme et la distance dans les espaces euclidiens usuels $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$
- définir les notions de boules (ouverte ou fermée), de parties ouvertes ou fermées et de parties bornées associées à la norme euclidienne
- définir les notions de point intérieur, point extérieur ou de point adhérent d'une partie

L'objectif est d'avoir bien compris ces définitions qui doivent être illustrées par des figures. La démonstration de ses propriétés dans un cas concret n'est pas un objectif prioritaire du programme.

I-2) *Fonction vectorielle*

Les élèves doivent :
- savoir définir les notions de fonction vectorielle $\overrightarrow{f}$ et de fonctions coordonnées associées à cette fonction
- savoir déterminer le domaine de définition d'une fonction vectorielle

I-3) *Limites et continuité*

Les élèves doivent :
- savoir définir les notions de limite et de continuité (ponctuelle et sur un intervalle) pour une fonction vectorielle
- savoir que la continuité de la fonction vectorielle s'obtient en étudiant la continuité des fonctions coordonnées
- savoir mener un prolongement par continuité pour une fonction vectorielle

Il s'agit de bien réinvestir les théorèmes usuels sur la continuité des fonctions réelles de la variable réelle pour justifier la continuité en vérifiant les hypothèses pour les quotients et les compositions.

I-4) ***Dérivation et classe*** C^n

Les élèves doivent :

— savoir définir les notions de dérivabilité, de vecteur dérivée et de fonction dérivée pour une fonction vectorielle

— savoir définir les dérivées successives et la notion de classe C^n où $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ pour une fonction vectorielle

— connaître et utiliser les opérations usuelles sur la dérivation : combinaison linéaire, produit avec une fonction numérique, produit scalaire et, dans $\mathbb{R}^3$, le produit vectoriel

— savoir que la dérivée $n$ieme est linéaire

— connaître et utiliser les formules de Leibniz pour déterminer des dérivées $n$ième d'un produit d'une fonction numérique avec une fonction vectoriel $\alpha \overrightarrow{f}$, d'un produit scalaire de deux fonctions vectorielles $\overrightarrow{f}.\overrightarrow{g}$ et, dans $\mathbb{R}^3$, d'un produit vectoriel de deux fonctions vectorielles $\overrightarrow{f} \wedge \overrightarrow{g}$

— connaître et utiliser le résultat pour déterminer la dérivée première d'une composée $\overrightarrow{f} \circ \alpha$ d'une fonction numérique α par une fonction vectorielle $\overrightarrow{f}$

Il s'agit de bien réinvestir les théorèmes usuels sur la dérivabilité et la classe C^n des fonctions réelles de la variable réelle.

I-5) ***Formule de Taylor-Young et développement limité***

Les élèves doivent :

— connaître la formule de Taylor-Young appliquée à $\overrightarrow{f}$ en t_0 écrites sous les deux formes :

$$\overrightarrow{f}(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(t-t_0)^k}{k!} \overrightarrow{f}^{(k)}(t_0) + (t-t_0)^n \overrightarrow{\varepsilon}(t) \qquad \text{ou} \qquad \overrightarrow{f}(t_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} \overrightarrow{f}^{(k)}(t_0) + h^n \overrightarrow{\varepsilon}(h)$$

— définir et calculer un développement limité d'une fonction vectorielle à partir des développements limités de ces fonctions coordonnées

— identifier un développement limité à la formule de Taylor-Young quand c'est possible pour déterminer les dérivées successives de la fonction vectorielle en un point

II) ***Courbes paramétrées du plan***

II-1) ***Définitions et exemples***

Les élèves doivent :

— pourvoir identifier la fonction vectorielle et les fonctions coordonnées associée à une courbe paramétrée

— définir la notion de point $\mathrm{M}(t)$ de paramètre t d'une courbe paramétrée

— proposer une visualisation de la courbe en Python

— connaître l'interprétation cinématique d'une courbe paramétrée comme le mouvement d'un point mobile $\mathrm{M}(t)$

II-2) ***Tangente***

Les élèves doivent :

— connaître la définition géométrique d'une tangente vu comme limite des cordes et, éventuellement, exploiter cette définition pour déterminer une tangente en particulier lorsqu'on veut déterminer une tangente en un point limite

— définir les notions de points réguliers et stationnaires et la notion de courbe régulière

— savoir déterminer une tangente en un point régulier et un point stationnaire (si $[t \mapsto \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)]$ est suffisamment dérivable)
Pour déterminer une équation cartésienne de la tangente, plusieurs techniques ont été revues :

- directeur $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et détermination de c avec un point
- utilisation d'un déterminant

— savoir préciser l'allure au voisinage d'un point stationnaire (si $[t \mapsto \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)]$ est suffisamment dérivable) en utilisant un DL vectoriel :

point à allure normale, d'inflexion, de rebroussement de 1er ou 2nd espèce

On pourra consulter le le TD n°1 du chapitre 1

II-3) ***Branches infinies***

Les élèves doivent :

— définir et identifier les branches infinies d'une courbe et reconnaître les asymptotes et les branches paraboliques

— pouvoir préciser localement l'allure de la courbe

II-4) Plan d'étude d'une courbe paramétrée

Les élève doivent savoir utiliser le tableau commun des variations d'une courbe paramétrée pour finaliser le tracé.
On pourra consulter la fiche méthode sur les tableaux communs de variations
Les élèves doivent :

- repérer les symétries d'une courbe paramétrée (éventuellement avec une indication pour les symétries hors périodicité et parité) et expliquer la réduction du domaine d'étude associée à une symétrie
- organiser l'étude d'une courbe paramétrée
  On veillera que les élèves justifient totalement les variations et les limites du tableau commun des variations.
- parvenir à obtenir une esquisse de la courbe en exploitant les informations recueillies à travers l'étude menée
- mener des études complémentaires à la demande de l'examinateur (point de rencontre avec les axes, point d'inflexion, point double)

On pourra consulter le TD n° 2 du chapitre 1

CHAPITRE II COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

I) Produit de sous-espaces vectoriels

Les élèves doivent :

- savoir définir un produit cartésien de p espaces vectoriels
- savoir qu'un produit cartésien de p espaces vectoriels sur un même corps est un espace vectoriel et préciser les lois et le zéros
- savoir déterminer la dimension d'un produit cartésien de p espaces vectoriels de dimensions finies

II) Somme de sous-espaces vectoriels, somme directe de sous-espaces vectoriels

II-1) Sev supplémentaire dans un espace vectoriel (rappels PTSI)

Les élèves doivent :

- repérer la caractérisation à utiliser pour démontrer que des sev sont supplémentaires (cas $\dim < +\infty$ ou dim quelconque)
- construire une stratégie (utilisation de sev engendré ou d'un retour à la définition pour prouver que F ou G sont des sev,rechercher des bases en dim $< +\infty$ pour obtenir $\dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} = \dim \mathrm{E}$, mise en place d'un raisonnement par analyse/synthèse pour prouver $\mathrm{E} \subset \mathrm{F} + \mathrm{G}$ (cas dim qcq))

II-2) Somme d'un nombre fini de sous-espace vectoriel II-3) Somme directe de sous-espace vectoriel

Les élèves doivent :

- savoir définir et utiliser les notions de sommes finie de sous-espace vectoriel et de somme finie directe de sous-espace vectoriel
- caractériser une somme directe par le fait que l'unique décomposition du vecteur nul dans cette somme est triviale
  Attention! C'est la seule caractérisation au programme. Pas de caractérisation avec des intersections
  Les élèves doivent pouvoir toutefois démontrer l'équivalence de cette définition avec la caractérisation $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0_{\mathrm{E}}\}$ vu dans le cas de deux sev en PTSI.
- définir une base adaptée à une décomposition en somme directe en dimension finie
- connaître le résultat sur la dimension d'une somme directe de sev de dimension finie

• ***Exercices*** :

- Tous les exemples du compléments sur $\sim$ et o ont été traitées
- Tous les exemples et les exercices du chapitre I auront été traités.
- Les exemples 1 à 3 du chapitre II auront été traités

FIN