PROGRAMME DE KHÔLLE DE LA SEMAINE N°5

L'oral commencera avec une question de cours issue de la la liste des questions de cours associée à ce programme et sera évaluée sur 4 points. La réponse à cette question de cours doit être rapide et précise! (Pas plus de 20 minutes)

- **Cours** :

CHAPITRE 0 RÉVISION D'ALGÈBRE LINÉAIRE

Révision du chapitre en insistant sur :

VIII) Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel

VIII-1) Endomorphisme identité et matrice de passage

Les élèves doivent pouvoir interpréter une matrice de passage P entre deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ d'un espace vectoriel comme la matrice de l'identité $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(id)$. La relation $X = PX'$ de changement de bases entre les coordonnées traduit matriciellement alors la relation vectorielle $x = id(x)$

VII-2) Homothétie *VII-3) Projecteurs et symétries vectoriells*

Les élèves doivent :

- définir une homothétie et, en dimension finie, préciser sa matrice dans une base quelconque
- définir le projecteur sur F parallèlement à G lorsque $E = F \oplus G$, préciser le noyau et l'image de ce projecteur, relier l'image et l'ensemble des vecteurs invariants
- faire le lien entre les projecteurs sur F parallèlement à G et sur G parallèlement à F
- caractériser un projecteur comme un endomorphisme p vérifiant $p \circ p = p$
- en dimension finie, préciser la matrice d'un projecteur dans une base adaptée
- définir une famille de projecteurs associée à une décomposition en somme directe
- définir la symétrie par rapport à F parallèlement à G
- relier les symétries et les projecteurs
- caractériser une symétrie comme un endomorphisme s vérifiant $s \circ s = s$
- en dimension finie, préciser la matrice d'une symétrie dans une base adaptée

On pourra consulter le TD n° 3 du chapitre 0

RELATION $\sim$ ET o et DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Les élèves doivent :

- savoir caractériser $f = o_a(g)$ par : $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0$ ou encore $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$
- savoir caractériser $f(x) \sim_a g(x)$ par $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1$ ou encore $f(x) = g(x) + o_a\big(g(x)\big)$
- connaître les équivalents usuels et DL usuels
- connaître les opérations autorisées sur les équivalents (produit, quotient, passage à une puissance, changement de variables)
- savoir réaliser les opérations usuelles (somme, produit, changement de variable simple) sur les développements limités
- savoir « nettoyer » une expression pour trouver un équivalent
- savoir utiliser des DL pour obtenir un équivalent (premier terme non nul du développement limité)
- savoir obtenir un DL par intégration termes à termes (exemple usuel de Arctan, Arcsin à connaître)

On pourra consulter le TD de révision sur l'asymptotique

CHAPITRE I FONCTIONS VECTORIELLES ET COURBES PLANES PARAMÉTRÉES

Rappels de géométrie plane :

- représentation cartésienne d'une droite dans le plan (notion d'équation réduite avec pente et ordonnée à l'origine)
- représentation paramétrique d'une droite dans le plan
- notion de vecteur directeur et de vecteur normal
- passage d'une représentation à l'autre

I) *Fonctions vectorielles d'une variable réelles à valeur dans* $\mathbb{R}^2$ *ou* $\mathbb{R}^3$

I-1) *Introduction à la topologie euclidienne de* $\mathbb{R}^2$ *ou* $\mathbb{R}^3$

Les élèves doivent :
- savoir définir et calculer le produit scalaire, la norme et la distance dans les espaces euclidiens usuels $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$
- définir les notions de boules (ouverte ou fermée), de parties ouvertes ou fermées et de parties bornées associées à la norme euclidienne
- définir les notions de point intérieur, point extérieur ou de point adhérent d'une partie

L'objectif est d'avoir bien compris ces définitions qui doivent être illustrées par des figures. La démonstration de ses propriétés dans un cas concret n'est pas un objectif prioritaire du programme.

I-2) *Fonction vectorielle*

Les élèves doivent :
- savoir définir les notions de fonction vectorielle $\overrightarrow{f}$ et de fonctions coordonnées associées à cette fonction
- savoir déterminer le domaine de définition d'une fonction vectorielle

I-3) *Limites et continuité*

Les élèves doivent :
- savoir définir les notions de limite et de continuité (ponctuelle et sur un intervalle) pour une fonction vectorielle
- savoir que la continuité de la fonction vectorielle s'obtient en étudiant la continuité des fonctions coordonnées
- savoir mener un prolongement par continuité pour une fonction vectorielle

Il s'agit de bien réinvestir les théorèmes usuels sur la continuité des fonctions réelles de la variable réelle pour justifier la continuité en vérifiant les hypothèses pour les quotients et les compositions.

I-4) *Dérivation et classe* C^n

Les élèves doivent :
- savoir définir les notions de dérivabilité, de vecteur dérivée et de fonction dérivée pour une fonction vectorielle
- savoir définir les dérivées successives et la notion de classe C^n où $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ pour une fonction vectorielle
- connaître et utiliser les opérations usuelles sur la dérivation : combinaison linéaire, produit avec une fonction numérique, produit scalaire et, dans $\mathbb{R}^3$, le produit vectoriel
- savoir que la dérivée $n$ieme est linéaire
- connaître et utiliser les formules de Leibniz pour déterminer des dérivées $n$ième d'un produit d'une fonction numérique avec une fonction vectoriel $\alpha\overrightarrow{f}$, d'un produit scalaire de deux fonctions vectorielles $\overrightarrow{f}.\overrightarrow{g}$ et, dans $\mathbb{R}^3$, d'un produit vectoriel de deux fonctions vectorielles $\overrightarrow{f} \wedge \overrightarrow{g}$
- connaître et utiliser le résultat pour déterminer la dérivée première d'une composée $\overrightarrow{f} \circ \alpha$ d'une fonction numérique α par une fonction vectorielle $\overrightarrow{f}$

Il s'agit de bien réinvestir les théorèmes usuels sur la dérivabilité et la classe C^n des fonctions réelles de la variable réelle.

I-5) *Formule de Taylor-Young et développement limité*

Les élèves doivent :
- connaître la formule de Taylor-Young appliquée à $\overrightarrow{f}$ en t_0 écrites sous les deux formes :
$$\overrightarrow{f}(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(t-t_0)^k}{k!}\overrightarrow{f}^{(k)}(t_0) + (t-t_0)^n\overrightarrow{\varepsilon}(t) \qquad \text{ou} \qquad \overrightarrow{f}(t_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!}\overrightarrow{f}^{(k)}(t_0) + h^n\overrightarrow{\varepsilon}(h)$$
- définir et calculer un développement limité d'une fonction vectorielle à partir des développements limités de ces fonctions coordonnées
- identifier un développement limité à la formule de Taylor-Young quand c'est possible pour déterminer les dérivées successives de la fonction vectorielle en un point

II) Courbes paramétrées du plan

II-1) Définitions et exemples

Les élèves doivent :

— pourvoir identifier la fonction vectorielle et les fonctions coordonnées associée à une courbe paramétrée

— définir la notion de point $M(t)$ de paramètre t d'une courbe paramétrée

— proposer une visualisation de la courbe en Python

— connaître l'interprétation cinématique d'une courbe paramétrée comme le mouvement d'un point mobile $M(t)$

II-2) Tangente

Les élèves doivent :

— connaître la définition géométrique d'une tangente vu comme limite des cordes et, éventuellement, exploiter cette définition pour déterminer une tangente en particulier lorsqu'on veut déterminer une tangente en un point limite

— définir les notions de points réguliers et stationnaires et la notion de courbe régulière

— savoir déterminer une tangente en un point régulier et un point stationnaire (si $[t \mapsto \overrightarrow{OM}(t)]$ est suffisamment dérivable)
Pour déterminer une équation cartésienne de la tangente, plusieurs techniques ont été revues :

- directeur $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et détermination de c avec un point
- utilisation d'un déterminant

— savoir préciser l'allure au voisinage d'un point stationnaire (si $[t \mapsto \overrightarrow{OM}(t)]$ est suffisamment dérivable) en utilisant un DL vectoriel :

point à allure normale, d'inflexion, de rebroussement de 1er ou 2nd espèce

Le TD n° 1 sur les études de points stationnaires sera réalisé lundi 30/09 au soir.

- ***Exercices*** :

- Tous les exemples et les exercices du chapitre 0 ont été traités
- Tous les exemples du compléments sur $\sim$ et o ont été traitées
- Les exemples 1 à 7 (y compris le 3/2) et l'exercice 1 du chapitre I auront été traités.

FIN