PROGRAMME DE KHÔLLE DE LA SEMAINE N°4

L'oral commencera avec une question de cours issue de la la liste des questions de cours associée à ce programme et sera évaluée sur 4 points. La réponse à cette question de cours doit être rapide et précise! (Pas plus de 20 minutes)

Le reste de l'oral consistera en des exercices laissés au choix de l'examinateur dans le cadre du programme de khôlles. Lors de votre présentation de la résolution d'un exercice, l'examinateur pourra être amené à vous demander de préciser des points de cours. Il pourra également, s'il le souhaite, vous proposez d'abréger une question calculatoire en vous donnant les résultats utiles pour poursuivre l'exercice.

- ***Cours*** :

CHAPITRE 0 RÉVISION D'ALGÈBRE LINÉAIRE

I) Espace vectoriel (généralités) et II) Famille de vecteurs (généralités)

Les élèves doivent connaître et maîtriser le vocabulaire courant lié aux espaces vectoriels(vecteur, scalaire, loi interne et loi externe et leurs propriétés, combinaison linéaire, vecteur nul, sous-espace vectoriel, famille libre et liée de vecteurs, vecteurs linéairement indépendants, vecteurs non colinéaires, base). Ils doivent pouvoir définir la notion d'espace vectoriel de dimension finie et, le cas échéant, déterminer la dimension.

III) Espace vectoriel de dimension finie et bases et IV) Coordonnées et changement de bases dans un espace vectoriel

Les élèves doivent :

- savoir prouver qu'un espace n'est pas de dimension finie en raisonnant par l'absurde (en exhibant une famille libre qui a plus de vecteurs qu'une famille génératrice finie supposée) et connaître des exemples de référence.
- connaître le théorème d'existence des base en dimension finie et savoir construire des bases soit par le théorème de la base extraite soit par le théorème de la base incomplète.
- savoir prouver qu'une famille donnée est une base d'un espace vectoriel en exploitant éventuellement la connaissance préalable de la dimension de l'espace vectoriel.
- connaître la dimension et les bases canoniques des espaces vectoriels de référence.
- définir et déterminer la colonne des coordonnées d'un vecteur dans une base donnée
- définir et déterminer les matrices de passage entre deux bases d'un espace vectoriel et savoir qu'elles sont des matrices inverses l'une de l'autre (Des rappels ont été fait sur l'algorithme de Gaus-Jordan)
- connaître et utiliser la formule de changement de bases entre deux bases d'un espace vectoriel

Pour la méthodologie et la rédaction, on pourra consulter le TD n°1 du chapitre 0

V) Formule de Grassmann et sev supplémentaires

Les élèves doivent :

- savoir démontrer l'égalité de deux sev éventuellement en utilisant les dimensions
- connaître et utiliser la formule de Grassmann ($\dim(\mathrm{F}+\mathrm{G}) = \dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} - \dim(\mathrm{F} \cap \mathrm{G})$ où F et G sont des sev d'un $\mathbb{K}$ev E de dimension finie)
- connaître la définition de sev supplémentaires et savoir démontrer que deux sev sont supplémentaires éventuellement en utilisant les dimensions
- utiliser la famille $\mathscr{B}_{\mathrm{F}} \cup \mathscr{B}_{\mathrm{G}}$ où $\mathscr{B}_{\mathrm{F}}$ (resp $\mathscr{B}_{\mathrm{G}}$) est une base du sev F pour obtenir une famille génératrice de $\mathrm{F}+\mathrm{G}$, pour étudier le caractère directe de la somme, pour construire un supplémentaire

VI) Application linéaire (généralité) et VII) Matrice d'une application linéaire

Les élèves doivent connaître et maîtriser le vocabulaire courant lié aux applications linéaire(application linéaire, endomorphisme, noyau, image, isomorphisme, automorphisme, noyau, image et rang d'une application linéaire).
Les élèves doivent également :

- connaître le lien entre injectivité et noyau, celui entre surjectivité et image
- connaître et utiliser le théorème du rang
- connaître et utiliser si $\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{F}$ l'équivalence entre les notions d'injectivité et de surjectivité pour $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$
- définir et déterminer la matrice d'une application linéaire et relier la relation vectorielle $y = f(x)$ à la relation matricielle $\mathrm{Y} = \mathrm{AX}$
- savoir utiliser l'isomorphisme entre $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$ si $\dim \mathrm{E} = p$ et $\dim \mathrm{F} = n$ et savoir relier le produit matriciel à la composition d'applications linéaires
- savoir interpréter le produit matriciel $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ par une post-multiplication de A par B s'interprétant par des opérations sur les colonne de A ou par une pré-multiplication de B par A s'interprétant par des opérations sur les colonne de B

- utiliser la matrice d'une application linéaire pour déterminer le noyau, l'image et le rang
- connaître et utiliser la formule de changement de bases pour une application linéaire et sa forme particulière dans le cas d'un endomorphisme

On pourra consulter le TD n° 2 du chapitre 0

VII) Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel

VII-1) Endomorphisme identité et matrice de passage

Les élèves doivent pouvoir interpréter une matrice de passage P entre deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ d'un espace vectoriel comme la matrice de l'identité $\mathrm{P} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(id)$. La relation $\mathrm{X} = \mathrm{PX}'$ de changement de bases entre les coordonnées traduit matriciellement alors la relation vectorielle $x = id(x)$

VII-2) Homothétie *VII-3) Projecteurs et symétries vectoriells*

Les élèves doivent :

- définir une homothétie et, en dimension finie, préciser sa matrice dans une base quelconque
- définir le projecteur sur F parallèlement à G lorsque $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$, préciser le noyau et l'image de ce projecteur, relier l'image et l'ensemble des vecteurs invariants
- faire le lien entre les projecteurs sur F parallèlement à G et sur G parallèlement à F
- caractériser un projecteur comme un endomorphisme p vérifiant $p \circ p = p$
- en dimension finie, préciser la matrice d'un projecteur dans une base adaptée
- définir une famille de projecteurs associée à une décomposition en somme directe
- définir la symétrie par rapport à F parallèlement à G
- relier les symétries et les projecteurs
- caractériser une symétrie comme un endomorphisme s vérifiant $s \circ s = s$
- en dimension finie, préciser la matrice d'une symétrie dans une base adaptée

On pourra consulter le TD n° 3 du chapitre 0

Les démonstration par récurrence

Les élèves doivent pouvoir rédiger convenablement des raisonnements par récurrences en énonçant le principe utilisé.

Relation $\sim$ et o et développements limités

Les élèves doivent :

- savoir caractériser $f = o_a(g)$ par : $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 0$ ou encore $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$
- savoir caractériser $f(x) \sim_a g(x)$ par $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 1$ ou encore $f(x) = g(x) + o_a\big(g(x)\big)$
- connaître les équivalents usuels et DL usuels
- connaître les opérations autorisées sur les équivalents (produit, quotient, passage à une puissance, changement de variables)
- savoir réaliser les opérations usuelles (somme, produit, changement de variable simple) sur les développements limités
- savoir « nettoyer » une expression pour trouver un équivalent
- savoir utiliser des DL pour obtenir un équivalent (premier terme non nul du développement limité)
- savoir obtenir un DL par intégration termes à termes (exemple usuel de Arctan, Arcsin à connaître)

- ***Exercices*** :

- Tous les exemples du chapitre 0 ont été traités.
- Les exercices situés en fin de la fiche Relation $\sim$ et o et le TD associé.

FIN