

L'oral commencera avec une question de cours issue de la la liste des **questions de cours** associée à ce programme et sera évaluée sur 4 points. La réponse à cette question de cours doit être rapide et précise! (Pas plus de 20 minutes)

Le reste de l'oral consistera en des exercices laissés au choix de l'examineur dans le cadre du programme de khôlles. Lors de votre présentation de la résolution d'un exercice, l'examineur pourra être amené à vous demander de préciser des points de cours. Il pourra également, s'il le souhaite, vous proposer d'abrèger une question calculatoire en vous donnant les résultats utiles pour poursuivre l'exercice.

• **Cours** :

CHAPITRE 0 RÉVISION D'ALGÈBRE LINÉAIRE

I) Espace vectoriel (généralités) et II) Famille de vecteurs (généralités)

Les élèves doivent connaître et maîtriser le vocabulaire courant lié aux espaces vectoriels (vecteur, scalaire, loi interne et loi externe et leurs propriétés, combinaison linéaire, vecteur nul, sous-espace vectoriel, famille libre et liée de vecteurs, vecteurs linéairement indépendants, vecteurs non colinéaires, base). Ils doivent pouvoir définir la notion d'espace vectoriel de dimension finie et, le cas échéant, déterminer la dimension.

III) Espace vectoriel de dimension finie et bases et IV) Coordonnées et changement de bases dans un espace vectoriel

Les élèves doivent :

- savoir prouver qu'un espace n'est pas de dimension finie en raisonnant par l'absurde (en exhibant une famille libre qui a plus de vecteurs qu'une famille génératrice finie supposée) et connaître des exemples de référence.
- connaître le théorème d'existence des bases en dimension finie et savoir construire des bases soit par le théorème de la base extraite soit par le théorème de la base incomplète.
- savoir prouver qu'une famille donnée est une base d'un espace vectoriel en exploitant éventuellement la connaissance préalable de la dimension de l'espace vectoriel.
- connaître la dimension et les bases canoniques des espaces vectoriels de référence.
- définir et déterminer la colonne des coordonnées d'un vecteur dans une base donnée
- définir et déterminer les matrices de passage entre deux bases d'un espace vectoriel et savoir qu'elles sont des matrices inverses l'une de l'autre (Des rappels ont été fait sur l'algorithme de Gauss-Jordan)
- connaître et utiliser la formule de changement de bases entre deux bases d'un espace vectoriel

Pour la méthodologie et la rédaction, on pourra consulter le **TD n°1 du chapitre 0**

V) Formule de Grassmann et sev supplémentaires

Les élèves doivent :

- savoir démontrer l'égalité de deux sev éventuellement en utilisant les dimensions
- connaître et utiliser la formule de Grassmann ($\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$) où F et G sont des sev d'un \mathbb{K} ev E de dimension finie)
- connaître la définition de sev supplémentaires et savoir démontrer que deux sev sont supplémentaires éventuellement en utilisant les dimensions
- utiliser la famille $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ où \mathcal{B}_F (resp \mathcal{B}_G) est une base du sev F pour obtenir une famille génératrice de $F + G$, pour étudier le caractère directe de la somme, pour construire un supplémentaire

VI) Application linéaire (généralité) et VII) Matrice d'une application linéaire

Les élèves doivent connaître et maîtriser le vocabulaire courant lié aux applications linéaire (application linéaire, endomorphisme, noyau, image, isomorphisme, automorphisme, noyau, image et rang d'une application linéaire).

Les élèves doivent également :

- connaître le lien entre injectivité et noyau, celui entre surjectivité et image
- connaître et utiliser le théorème du rang
- connaître et utiliser si $\dim E = \dim F$ l'équivalence entre les notions d'injectivité et de surjectivité pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$
- définir et déterminer la matrice d'une application linéaire et relier la relation vectorielle $y = f(x)$ à la relation matricielle $Y = AX$
- savoir utiliser l'isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $M_{np}(\mathbb{K})$ si $\dim E = p$ et $\dim F = n$ et savoir relier le produit matriciel à la composition d'applications linéaires
- savoir interpréter le produit matriciel $A \times B$ par une post-multiplication de A par B s'interprétant par des opérations sur les colonnes de A ou par une pré-multiplication de B par A s'interprétant par des opérations sur les colonnes de B
- utiliser la matrice d'une application linéaire pour déterminer le noyau, l'image et le rang
- connaître et utiliser la formule de changement de bases pour une application linéaire et sa forme particulière dans le cas d'un endomorphisme

On pourra consulter le **TD n° 2 du chapitre 0**

VII) Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel

VII-1) Endomorphisme identité et matrice de passage

Les élèves doivent pouvoir interpréter une matrice de passage P entre deux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' d'un espace vectoriel comme la matrice de l'identité $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(id)$. La relation $X = PX'$ de changement de bases entre les coordonnées traduit matriciellement alors la relation vectorielle $x = id(x)$

VII-2) Homothétie VII-3) Projecteurs et symétries vectorielles

Les élèves doivent :

- définir une homothétie et, en dimension finie, préciser sa matrice dans une base quelconque
- définir le projecteur sur F parallèlement à G lorsque $E = F \oplus G$, préciser le noyau et l'image de ce projecteur, relier l'image et l'ensemble des vecteurs invariants
- faire le lien entre les projecteurs sur F parallèlement à G et sur G parallèlement à F
- caractériser un projecteur comme un endomorphisme p vérifiant $p \circ p = p$
- en dimension finie, préciser la matrice d'un projecteur dans une base adaptée
- définir une famille de projecteurs associée à une décomposition en somme directe
- définir la symétrie par rapport à F parallèlement à G
- relier les symétries et les projecteurs
- caractériser une symétrie comme un endomorphisme s vérifiant $s \circ s = s$
- en dimension finie, préciser la matrice d'une symétrie dans une base adaptée

On pourra consulter [le TD n° 3 du chapitre 0](#)

- **Exercices** : Tous les exemples du [chapitre 0](#) auront été traités en cours ou en TD.

FIN