PROGRAMME DE KHÔLLE DE LA SEMAINE N°26

Pas de question de cours cette semaine : la connaissance du cours sera évaluée au fil des exercices.

• ***Cours*** : CHAPITRE XIV COURBES ET SURFACES DE L'ESPACE

I) Révision de géométrie dans l'espace (Rappels PTSI)

Les élèves doivent maîtriser

— les représentation paramétriques des droites et des plans
— les représentations cartésiennes des droites, des plans, des sphères
— l'utilisation du produit scalaire, du produit vectoriel et du déterminant pour obtenir les représentations
— les projections orthogonales d'un point sur un plan ou sur une droite
— l'étude de problèmes d'intersection d'un plan et d'une sphère (cercle de l'espace) et de 2 sphères (plan tangent à une sphère, sphères tangentes)

II) Courbes paramétrées dans l'espace

Les élèves doivent définir la notion de courbe paramétrée dans l'espace, de point régulier de cette courbe et savoir déterminer la tangente à une courbe paramétrée en un point régulier.
Les élèves doivent savoir prouver qu'une courbe paramétrée de l'espace est plane et reconnaître des courbes usuelles (cercle ou conique) en précisant les éléments caractéristiques.

III) Surfaces

Les élèves doivent connaître les deux modes de représentation d'une surface : équation cartésienne ou représentation paramétrique. Des exemples de passage d'une représentation à l'autre ont été étudiés.
Le cas particulier des surfaces données par une équation $z = g(x, y)$ a été évoquée.
Les élèves doivent pouvoir se représenter une surface en étudiant les sections planes de celle-ci avec les plans orthogonaux aux axes du repère (voir partie suivante)

IV) Sections planes, courbes tracées sur une surface

Les élèves doivent

— savoir caractériser une section plane d'une surface. L'étude des intersections de deux surfaces en toute généralité n'est pas un attendu sauf dans le cas des sections planes et du cas particulier de l'intersections de deux sphères.
— savoir vérifier qu'une courbe est tracée sur une surface
— savoir caractériser les courbes coordonnées dans le cas d'une surface donnée par une représentation paramétrique

V) Plan tangent à une surface

Les élèves doivent

— définir les notions de points réguliers et surface régulière quelque soit le mode de représentation de la surface
— pouvoir déterminer le plan tangent et la normale en un point régulier d'une surface quelque soit le mode de représentation de la surface
— savoir que la tangente en un point régulier d'un courbe régulière tracées sur une surface est incluse dans le plan tangent en ce point
— pourvoir définir la notion de point régulier d'une courbe qui est l'intersection de deux surfaces et déterminer la tangente en ce point

VI) Exemples de surfaces

Les élèves doivent :

— pourvoir préciser la position de la surface par rapport à son plan tangent dans le cas d'une surface donnée par une équation $z = g(x, y)$ où g est C^2 en un point critique de g en faisant intervenir la matrice Hessienne de g (cas où S est toujours du même côté du plan tangent, cas où S traverse son plan tangent (point col))
— savoir définir et reconnaître une surface réglée (à partir d'une représentation cartésienne ou paramétrique de S)
— pourvoir obtenir une représentation paramétrique ou cartésienne d'une surface réglée définie par une famille de génératrices.
— savoir que le plan tangent en un point régulier d'une surface réglée contient la génératrice passant par ce point
— savoir définir et reconnaître une surface de révolution
— identifier les parallèles, l'axe et les méridiennes d'une surface de révolution
— savoir que la rotation d'une courbe autour d'un axe engendre une surface de révolution (cette courbe est une directrice)
— pouvoir obtenir une représentation cartésienne ou paramétrique d'une surface de révolution connaissant l'axe et une directrice
— pouvoir obtenir une représentation paramétrique d'une surface de révolution par rotation d'une directrice autour d'un axe du repère en exploitant les matrices de rotations

On pourra aussi consulter les TD n° 1, TD n° 2 et TD n° 3 et 4 et les fiches méthodes :
point régulier et tangence et surfaces réglées, surfaces de révolution et surfaces développables

I) Généralités et II) Lois usuelles (définition des lois, situation type)

Les élèves doivent :

- pouvoir définir une variable aléatoire réelle et déterminer sa loi
- pouvoir utiliser, pour le calcul de probabilité, le système complet d'événements associé aux valeurs distinctes de $X(\Omega)$ prise par la variable aléatoire X
- connaître la définitions des lois usuelles (uniforme, Bernoulli, binomiale, géométrique et Poisson) et pouvoir citer des exemples de schémas type d'application de ces lois.
  Pour la loi de Poisson, **le résultat de convergence de lois binomiales vers une loi de Poisson** n'a été qu'évoqué pour expliquer le nom de loi des événements rares **mais il n'est plus au programme**
- pourvoir reconnaître et justifier une loi usuelle dans une situation où une variable aléatoire suit l'une de ces lois usuelles
  Le programme impose la notation $X \sim Y$ **lorsque les variables aléatoires** X **et** Y **ont la même loi**

Attention, la notion de fonction de répartition n'est plus au programme
De même, la notion de loi sans mémoire pour la loi géométrique n'est plus au programme.

III) Couple et suite de variables aléatoires discrètes

Les élèves doivent :

- pouvoir définir et calculer la loi conjointe, les lois marginales ou des lois conditionnelles associées à un couple (X,Y) de variables aléatoires discrètes
- savoir définir la notion d'indépendance pour un couple de variables aléatoires discrètes, pour une famille de n variables aléatoires discrètes, pour une suite de variables aléatoires discrètes
  Le programme impose la notation $X \perp\!\!\!\perp Y$ **lorsque les variables aléatoires** X **et** Y **sont indépendantes**
- connaître la définition d'une suite i.i.d. de variables aléatoires
- connaître les conséquences de l'indépendance d'un couple de variables aléatoires discrètes en terme de loi conjointe et de loi conditionnelle par rapport aux lois marginales
- savoir que des images de variables aléatoires indépendantes sont encore des de variables aléatoires indépendantes
- connaître et utiliser le lemme des coalitions

IV) Espérance, variance

Les élèves doivent :

- définir la notion de variables aléatoires discrètes d'espérance finie et celle d'espérance
- connaître les propriétés de l'espérance : linéarité, positivité, croissance,
  $$\Big(\big(X \geqslant 0 \text{ et } E(X)=0\big) \Rightarrow P(X=0)=1\Big) \text{ et } \Big(\big(|Y| \leqslant X \text{ et } E(X) < +\infty\big) \Rightarrow E(Y) < +\infty\Big)$$
- connaître et utiliser la formule de transfert pour justifier et calculer une espérance
- définir la notion de variables aléatoires discrètes admettant une variance finie et les notions de variances et d'écart-type
- savoir calculer l'espérance et la variances d'une loi usuelles en revenant aux définitions à l'aide du théorème de dérivation terme à terme appliqué à des séries entières de référence
- savoir que $V(aX+b) = a^2V(X)$ lorsque a et b sont des réels et X une variable aléatoire, qu'une variable aléatoire de variance nulle est constante presque sûrement
- connaître l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour des variables aléatoires admettant une variance :
  $$\text{Si } X \text{ et } Y \text{ admettent une variance,} \quad E(XY)^2 \leqslant E(X^2)E(Y^2)$$
- définir la notion de variable aléatoire centrée, de variable aléatoire centrée réduite et savoir construire une variable centrée à partir d'une variable admettant une espérance, savoir construire une variable centrée réduite à partir d'une variable admettant une variance
- définir la notion de covariance dans le cas d'un couple de variables aléatoires discrètes admettant des variances finies et la notion de variable aléatoire décorrélée
  Attention, les propriétés usuelles de la covariance ne sont plus au programme comme la notion de coefficient de corrélation
- savoir exprimer la variance d'une somme de variables aléatoire de variances finies à l'aide des variances individuelles et des covariances entre les variables
- connaître, dans le cas de variables indépendantes, les conséquences l'espérance, la variance, la covariance. **Pas de réciproque!**

Pas de séries génératrices cette semaine
Pas d'exercice sur inégalité de Markov, de Tchebychev ou loi faible des grands nombres cette semaine

- ***Exercices*** :
  - Pour le chapitre XIV, tous les exemples et exercices auront été traités.
  - Pour le chapitre XV, les exemples 1 à 6 du cours, l'exercice 1 du chapitre XV et les parties I et III de l'exercice de probabilité sujet Maths A de 2024 ont été traitées.

FIN