PROGRAMME DE KHÔLLE DE LA SEMAINE N°21

L'oral commencera par des questions de cours issues de la la liste des questions de cours associée à ce programme.
Cette partie sera évaluée sur environ 4 points. La réponse doit être rapide et précise ! (Pas plus de 20 minutes).
Ces questions de cours peuvent être : l'énoncé d'un théorème ou d'une définition, un bilan des connaissances sur un thème précis, une mise en application directe d'un point ou d'une méthode du cours.

• ***Cours*** : CHAPITRE X   SÉRIES ENTIÈRES

III) *Développement en série entière au voisinage de* 0

III-1) *Fonction développable en série entière au voisinage de* 0

Les élèves doivent :

- savoir définir la notion de fonction développable en série entière (DSE) en 0
  Les étudiants doivent être capable de donner et de démontrer les DSE usuels de la liste des questions de cours
- connaître les conditions nécessaires :

  f est C^∞ et le DSE de f est donné par la série de Taylor de f en 0 qui a un rayon de convergence $R > 0$

  Un contre-exemple a été étudié en classe pour établir que ces conditions ne sont pas suffisantes.
  La formule de Taylor avec reste intégral permet d'estimer l'erreur entre $f(x)$ et les sommes partielles de sa série de Taylor.
- savoir qu'il y a unicité du DSE s'il existe

Méthode : Pour justifier qu'une fonction est de classe C^∞, on peut établir qu'elle est DSE sur le domaine considéré.

Si on parvient à déterminer le DSE $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, on peut obtenir les dérivées itérées de f en 0 car $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$

On pourra consulter le TD n° 3 du chapitre X

III-2) *Développement en série entière et équations différentielles*

Méthode : Recherche des solutions développable en série entière au voisinage de 0 d'une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont eux même développable en série entière.

Méthode : Technique de l'équation différentielle pour prouver qu'une fonction admet un DSE et le déterminer

Outil : dérivation terme à terme, manipulation des sommes de séries par changement d'indice, justifier le regroupement des sommes, utiliser l'unicité du DSE, utilisation d'une relation de récurrence pour déterminer le terme général d'une suite par itération, utilisation de factorielle pour simplifier des expression, calcul du rayon de convergence par la règle de d'Alembert, unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

On pourra voir le point méthode et le TD n° 4 du chapitre X

IV) *Développements en série entière usuels*

Les élèves doivent :

- connaître les développements en série entière (avec le rayon de convergence) associés à la série géométrique :

  $\dfrac{1}{1 \pm x}$, $\dfrac{1}{1+x^k}$ (changement de variables), $\dfrac{1}{(1-x)^k}$ (dérivée k ieme), $\pm \ln(1 \pm x)$ et $\operatorname{Arctan} x$ (intégration termes à termes)
- connaître les développements en série entière (avec le rayon de convergence) associés à la série exponentielle :

  $e^{\pm x}$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, $\cos x$ et $\sin x$
- connaître le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ (formule du binôme généralisée)
  Le programme précise que les étudiants peuvent utiliser directement sans démonstration les DSE de

  $\dfrac{1}{1-x}$, e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, $\ln(1+x)$, $\operatorname{Arctan} x$ et $(1+x)^\alpha$.

suite pages suivantes

I) *Isométries vectorielles*

I-1) Définition et caractérisation *I-2) Groupe orthogonal* *I-3) Exemple de référence : les symétries orthogonales*

Les élèves doivent :

- connaître la définition d'une isométrie (endomorphisme qui conserve la norme)
- connaître la caractérisation d'une isométrie par le produit scalaire (application de E dans E qui conserve le produit scalaire) ou par l'image des bases orthonormées (endomorphisme pour lequel l'image d'une BON est une BON)
- connaître le groupe orthogonal O(E) et savoir qu'il est inclus dans GL(E), qu'il est stable par composition et par passage à l'inverse.
- savoir qu'une isométrie qui laisse stable un sev F laisse également $F^{\perp}$ stable.
- définir une symétrie orthogonale (en particulier une réflexion) et savoir que c'est une isométrie.

II) *Matrices orthogonales*

II-1) Matrice d'un endomorphisme dans une BON, matrice de passage dans une BON
II-2) Matrice orthogonale *II-3) Matrices orthogonales et isométries*

Les élèves doivent :

- pouvoir exploiter les propriétés de calcul dans la BON $\mathscr{B}$ de E pour déterminer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ si $u \in \mathscr{L}(E)$
- savoir qu'une matrice de passage P entre deux BON vérifie $P^T P = I_n$
- savoir définir une matrice orthogonale ($M \in M_n(\mathbb{R})$ et $M^T M = I_n = MM^T$) et connaître la définition du groupe orthogonal et la notation $O_n(\mathbb{R})$ (ou $O(n)$)
- savoir caractériser les matrices orthogonales par l'une des relations équivalentes
  $M^T M = I_n \Leftrightarrow MM^T = I_n \Leftrightarrow$ les colonnes (resp. les lignes) de la matrice forme un BON de $\mathbb{R}^n$ euclidien usuel
- savoir qu'une matrice orthogonale est une matrice de passage entre deux bases BON
- savoir que, dans une BON, la matrice d'une isométrie est orthogonale et savoir identifier une symétrie orthogonale lorsqu'elle est donnée par sa matrice dans une BON ($A \in O_n(\mathbb{R})$ et $A^2 = I_n$)
- connaître la définition du groupe spécial orthogonal, la notion d'isométrie directe, d'isométrie indirecte et les notations $SO_n(\mathbb{R})$ (ou $SO(n)$) et SO(E) et savoir que $SO_n(\mathbb{R})$ est stable par le produit matriciel et le passage à l'inverse.
  Attention ! Terminologie directe/indirecte et plus positive/négative
- connaître les résultats sur le déterminant des matrices orthogonales/des isométries
- savoir que les valeurs propres d'une isométrie/matrice orthogonale sont de module 1

III) *Isométries de l'espace euclidien de dimension 2 ou 3*

III-1) Orientation d'un espace euclidien

Les élèves doivent :

- savoir qu'on oriente un espace euclidien en choisissant une base orthonormée $\mathscr{B}_0$ de référence : une autre base orthonormée $\mathscr{B}$ est directe lorsque $P = P_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}} \in SO_n(\mathbb{R})$ et indirecte lorsque $P = P_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}} \in O_n(\mathbb{R}) - SO_n(\mathbb{R})$
- connaître les conventions d'orientation dans le plan et l'espace usuel
- être capables, pour $n = 2$ ou $n = 3$, de savoir si une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ est dans $O_n(\mathbb{R})$ voir $SO_n(\mathbb{R})$ en montrant que les colonnes forment une base orthonormée voir une base orthonormée directe en utilisant le produit scalaire et, dans $\mathbb{R}^3$, le produit vectoriel.

.

III-2) Description des isométries vectorielles planes

Les élèves doivent :

- savoir que les isométries planes sont soit des rotations (pour les directes) soit des réflexions (pour les indirectes)
- connaître la forme d'une matrice orthogonale d'ordre 2 :
  $$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = R(\theta) \in SO_2(\mathbb{R}) \qquad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = S(\theta) \in O_2(\mathbb{R}) - SO_2(\mathbb{R})$$
- connaissant la matrice d'une isométrie plane, pouvoir l'identifier géométriquement (retournement, rotation, réflexion)‘
- connaissant la nature géométrique d'une isométrie, pouvoir donner sa matrice dans une base quelconque (orthonormée ou pas)

II-3) Description des isométries vectorielles de $\mathbb{R}^3$

Les élèves doivent :

- reconnaître une isométrie de l'espace à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée
- identifier les matrices de $O_3(\mathbb{R})$ ou de $SO_3(\mathbb{R})$ (en particulier en raisonnant en terme de base orthonormée (éventuellement directe) de ses colonnes)
- savoir définir les notions de rotation plane d'angle θ d'axe $D = \mathrm{Vect}(u)$ dans $\mathbb{R}^3$ et la notion de réflexion par rapport au plan P
- savoir que les isométries de l'espace non triviale (càd différente de $\pm id$) sont soit des rotations soit des composées de rotation/réflexion
- savoir déterminer une BON dans laquelle une rotation de $\mathbb{R}^3$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- savoir déterminer une BON dans laquelle une isométrie indirecte de $\mathbb{R}^3$ a pour matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

— savoir identifier les caractéristiques géométriques d'une isométrie de l'espace
— savoir utiliser la formule de changement de bases dans le cas de bases orthonormées pour donner la matrice d'une isométrie caractérisé géométriquement dans la base canonique

Attention! L'étude d'une isométrie directe ou d'une réflexion peut être donnée sans indication mais l'étude des isométries indirectes (en toute généralité) n'est pas un objectif du programme

On pourra consulter le point méthodologique et le TD n° 2 du chapitre XI

IV) Matrice symétrique réelle

Les élèves doivent :

— connaître la définition d'une matrice symétrique réelle d'ordre n, de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et savoir que $\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$
— savoir que les sev propres d'une matrice symétrique réelle sont 2 à 2 orthogonaux
— connaître le résultat de réduction des matrices symétriques réelles : une matrice symétrique réelle est diagonalisable avec une matrice de passage orthogonale soit : $\forall \mathrm{A} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}), \exists \mathrm{P} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{AP} = \mathrm{D}$ est diagonale et réelle.
Autrement dit : A est diagonalisable dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ dans une base orthonormée de vecteurs propres
Le nouveau programme introduit la notion de matrice orthogonalement diagonalisable
— savoir concrètement réduire une matrice symétrique réelle (d'ordre 2 ou 3) dans une base orthonormée de vecteurs propres pour avoir une matrice de passage orthogonale
— savoir que le résultat est faux si la matrice est symétrique mais à coefficients complexes (non réels)

On pourra consulter le point méthodologique et le TD n° 1 du chapitre XI

V) Application à l'étude des coniques

Les élèves doivent :

— pouvoir introduire la matrice de $\mathrm{S}_2(\mathbb{R})$ associée à la partie quadratique de l'équation d'une conique
— connaître la classification des coniques (genre ellipse, parabole, hyperbole) en fonction du déterminant de cette matrice et connaître les notions de coniques propres/coniques dégénérées.
— utiliser la réduction de cette matrice avec une matrice de passage de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ pour faire disparaître le terme croisé de l'équation d'une conique (rotation de la base)
— utiliser un changement d'origine pour faire disparaître la partie linéaire de l'équation d'une conique
— reconnaître et représenter une conique dans le repère initial suite à cette étude en précisant tous les éléments caractéristiques.

VI) Application à la recherche des extrema d'une fonction de deux variables

Les élèves doivent :

— connaître les définitions d'extremum (maximum ou minimum) local et global pour une application $[f : \mathscr{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}]$
— connaître la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour une application $[f : \mathscr{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}]$ de classe C^2
— connaître la condition nécessaire d'existence d'un extremum sur une partie ouverte $\mathscr{U}$ pour une application $[f : \mathscr{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}]$ de classe C^1 : ils sont à rechercher parmi les points critiques de f.
— connaître la condition suffisante de présence d'un extremum local utilisant les valeurs propres de la matrice Hessienne en un point critique. *Extrait du programme* : « *Classification à l'aide du déterminant et la trace de la matrice hessienne* »
— savoir rechercher d'éventuels extrema globaux sur des parties fermées bornées (traité uniquement à travers des exemples)

On pourra consulter les points méthodologiques et le TD n° 2 du chapitre XI (traité lundi)

• ***Exercices*** :

- Pour le chapitre X , tous les exemples et exercices ont été traités sauf exemple 9 qui est à faire en DM.
- Pour le chapitre XI, tous les exemples et exercices auront été traités.

FIN