PROGRAMME DE KHÔLLE DE LA SEMAINE N°20

L'oral commencera avec une question de cours issue de la la liste des questions de cours associée à ce programme et sera évaluée sur 4 points. (Bilan du cours sur les espaces Euclidiens et calculs de sommes de séries entières au programme)
La réponse à cette question de cours doit être rapide et précise! (Pas plus de 20 minutes)

• **Cours** : CHAPITRE X SÉRIES ENTIÈRES

I) Généralités sur les séries entières

I-1) Définition et premiers exemples I-2) Lemme d'Abel, rayon de convergence et somme d'une série entière
I-3) Calcul du rayon de convergence

Les élèves doivent :

- connaître la définition d'une série entière, des coefficients, du rayon de convergence et de la somme.
- connaître les notions de disque ouvert de convergence/ intervalle ouvert de convergence d'une série entière
- connaître et utiliser diverses méthodes pour déterminer le rayon de convergence (utilisation de convergence ponctuelle, de comparaison, d'un équivalent)
- savoir que les séries $\sum a_n z^n$, $\sum n a_n z^n$ et $\sum \frac{a_n}{n} z^n$ ont le même rayon de convergence
- savoir que les séries $\sum n^\alpha z^n$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ ont un rayon de convergence qui vaut 1

I-4) Opérations sur les séries entières

Les élèves doivent :

- connaître le résultat sur le rayon de convergence d'une somme de séries entières
- connaître le résultat sur le rayon de convergence et la somme d'un produit de Cauchy de deux séries entières

II) Propriétés de la somme d'une série entière d'une variable réelle

Les élèves doivent :

- distinguer l'intervalle ouvert de convergence et le domaine de définition de la somme d'une série entière
- savoir que la somme d'une série entière est C^0 sur son domaine de définition. *Ce résultat contient donc une formulation simplifié du théorème radial d'Abel que les élèves n'ont pas connaître dans toute sa généralité.*
- savoir que la somme d'une série entière est C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence
- savoir qu'on obtient la dérivée k ieme de la somme d'une série entière comme somme de la série entière où l'on a dérivé k fois termes à termes (théorème de dérivation terme à terme)
- savoir qu'on obtient une primitive de la somme d'une série entière en considérant la somme de la série entière où l'on a intégré terme à terme et savoir utiliser ce résultat pour calculer une intégrale d'une somme de série entière en permutant les symboles somme/intégrale
- retrouver et justifier les sommes de $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$. Les utiliser pour calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n}$, $|x| < 1$

Méthode :Calculs de rayon de convergence et calcul de somme (CL, dérivation ou intégration termes à termes, produit de Cauchy)

On pourra voir le point méthode et les exemples de référence d'utilisation des théorèmes.
et consulter le TD n° 1 du chapitre X

suite page suivante

III) *Développement en série entière au voisinage de* 0

III-1) *Fonction développable en série entière au voisinage de* 0

Les élèves doivent :

- savoir définir la notion de fonction développable en série entière (DSE) en 0
  Les étudiants doivent être capable de donner et de démontrer les DSE usuels (voir dernière page du cours)
- connaître les conditions nécessaires :
  f est C^∞ et le DSE de f est donné par la série de Taylor de f en 0 qui a un rayon de convergence $R > 0$
  Un contre-exemple a été étudié en classe pour établir que ces conditions ne sont pas suffisantes.
  La formule de Taylor avec reste intégral permet d'estimer l'erreur entre $f(x)$ et les sommes partielles de sa série de Taylor.
- savoir qu'il y a unicité du DSE s'il existe

Méthode : Pour justifier qu'une fonction est de classe C^∞, on peut établir qu'elle est DSE sur le domaine considéré.
Si on parvient à déterminer le DSE $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, on peut obtenir les dérivées itérées de f en 0 car $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$

On pourra consulter le TD n° 2 du chapitre X

III-2) *Développement en série entière et équations différentielles*

Méthode : Recherche des solutions développable en série entière au voisinage de 0 d'une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont eux même développable en série entière.

Méthode : Technique de l'équation différentielle pour prouver qu'une fonction admet un DSE et le déterminer

Outil : dérivation terme à terme, manipulation des sommes de séries par changement d'indice, justifier le regroupement des sommes, utiliser l'unicité du DSE, utilisation d'une relation de récurrence pour déterminer le terme général d'une suite par itération, utilisation de factorielle pour simplifier des expression, calcul du rayon de convergence par la règle de d'Alembert, unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

On pourra voir le point méthode et le TD n° 3 du chapitre X

IV) *Développements en série entière usuels*

Les élèves doivent :

- connaître les développements en série entière (avec le rayon de convergence) associés à la série géométrique :
  $\dfrac{1}{1 \pm x}$, $\dfrac{1}{1+x^k}$ (changement de variables), $\dfrac{1}{(1-x)^k}$ (dérivée k ieme), $\pm \ln(1 \pm x)$ et $\operatorname{Arctan} x$ (intégration termes à termes)
- connaître les développements en série entière (avec le rayon de convergence) associés à la série exponentielle :
  $e^{\pm x}$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, $\cos x$ et $\sin x$
- connaître le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ (formule du binôme généralisée)
  Le programme précise que les étudiants peuvent utiliser directement sans démonstration les DSE de
  $\dfrac{1}{1-x}$, e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, $\ln(1+x)$, $\operatorname{Arctan} x$ et $(1+x)^\alpha$.

- ***Exercices*** :

- Tous les exemples et les exercices du chapitre X

FIN