PROGRAMME DE KHÔLLE DE LA SEMAINE N°19

L'oral commencera avec une question de cours issue de la la liste des questions de cours associée à ce programme et sera évaluée sur 4 points. (Bilan du cours sur les espaces Euclidiens et calculs de sommes de séries entières au programme)
La réponse à cette question de cours doit être rapide et précise ! (Pas plus de 20 minutes)

• **Cours** :

CHAPITRE IX — ESPACES PRÉHILBERTIENS ET EUCLIDIENS

I) Produit scalaire et norme

Révision du programme précédent

II) Orthogonalité dans un espace euclidien

II-1) Vecteurs orthogonaux et théorème de Pythagore et II-2) Sev orthogonaux et orthogonal d'un sev

Révision du programme précédent

II-3) Famille orthonormale et procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Les élèves doivent

- savoir définir et caractériser une famille orthonormale ($(x_i)_{i\in I}$ est orthonormale si $\forall (i,j)\in I^2,\ \langle x_i, x_j\rangle = \begin{cases} 0 \text{ si } i\neq j \\ 1 \text{ si } i=j\end{cases}$

  La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$

  La base canonique de $M_n(\mathbb{R})$ est orthonormée pour le produit scalaire $\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$

  La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est orthonormée pour le produit scalaire $\langle P,Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ si $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q=\sum_{k=0}^{n} b_k X^k$

- **Algorithme de Gram-Schmidt** (avec une condition d'unicité) :

  - les élèves doivent savoir énoncer le théorème de Gram-Schmidt :

  « On peut construire une unique famille orthonormale $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_N)$ à partir d'une famille libre $(e_1,\dots,e_N)$ vérifiant

  i) $\forall n\in [\![1,N]\!]$, $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)=\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)$ et ii) $\forall n\in [\![1,N]\!]$, $\langle e_n,\varepsilon_n\rangle>0$ »

  - les élèves doivent savoir concrètement mettre en œuvre l'algorithme sur une famille avec un nombre « raisonnable » de vecteurs (pas de justification à faire de la démarche suivie). La rédaction proposée pour construire $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)$ à partir de $(e_1,\dots,e_n)$ est :

  - Etape n° 1 : $\varepsilon_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$

    Etape n° 2 : $\varepsilon_2 = \dfrac{u_2}{\|u_2\|}$ où $u_2 = e_2 - \langle e_2,\varepsilon_1\rangle\varepsilon_1$ Etape n° 3 : $\varepsilon_3 = \dfrac{u_3}{\|u_3\|}$ où $u_2 = e_3 - (\langle e_3,\varepsilon_1\rangle\varepsilon_1 + \langle e_3,\varepsilon_2\rangle\varepsilon_2)$

  Ces étapes peuvent s'interprêter avec la notion de projection orthogonale :

  Etape n° 2 : La projection orthogonale de e_2 sur $F_1=\mathrm{Vect}(e_1)=\mathrm{Vect}(\varepsilon_1)$ est $p(e_2)=\langle e_2,\varepsilon_1\rangle\varepsilon_1$

  aussi $u_2 = e_2 - p(e_2)$ dirige la droite orthogonale à F_1 dans $F_2=\mathrm{Vect}(e_1,e_2)$ donc $\varepsilon_2 = \dfrac{u_2}{\|u_2\|}$

  Etape n° 3 : La projection orthogonale de e_3 sur $F_2=\mathrm{Vect}(e_1,e_2)=\mathrm{Vect}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ est $p(e_3)=\langle e_3,\varepsilon_1\rangle\varepsilon_1+\langle e_3,\varepsilon_2\rangle\varepsilon_2$

  aussi $u_3 = e_3 - p(e_3)$ dirige la droite orthogonale à F_2 dans $F_3=\mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_3)$ donc $\varepsilon_3 = \dfrac{u_3}{\|u_3\|}$

II-4) Orthogonalité dans un espace euclidien et II-5) Supplémentaire orthogonal d'un sev de dimension finie

Les élèves doivent

- savoir qu'il existe des bases orthonormées dans un sev de dimension finie d'un espace préhilbertien et pourvoir en déterminer une par mise en œuvre de l'algorithme de Gram-Schmidt
- savoir mener les calculs de produit scalaire, de norme à l'aide des coordonnées dans une base orthonormée

  Dans une BON, le calcul peut se mener directement sur les coordonnées comme usuellement dans $\mathbb{R}^n$

- savoir que, si $\mathscr{B}=(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base orthonormée de E : $x=\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i$ pour tout vecteur x de E

III) Projection orthogonale en dimension finie

III-1) Projection orthogonale sur un sev de dimension finie

Les élèves doivent savoir que

- Si $\dim F < +\infty$ alors F et $F^{\perp}$ sont supplémentaire dans E. Ainsi, si E est euclidien : $\dim F^{\perp} = \dim E - \dim F$
- Si F est un hyperplan dont on dispose une équation $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ dans une base orthonormée, alors $F^{\perp}$ est une droite dirigée par le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(a_1, \ldots, a_n)$ qu'on appelle vecteur normal à l'hyperplan.
- si F est un sev de dim finie de $(E, \langle . ; . \rangle)$, la projection orthogonale p_F sur F est le projecteur sur F parallèlement à $F^{\perp}$
- une application $f : E \to E$ est une projection orthogonale lorsque $\begin{cases} f \in \mathscr{L}(E) \\ f \circ f = f \\ \text{Ker } f \text{ et Im } f \text{ sont orthogonaux} \end{cases}$
- si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de F, on a, pour tout x de E, $p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x \rangle e_i$
- si F est un hyperplan, on utilise $p_F(x) = x - p_{F^{\perp}}(x)$ où on calcule facilement la projection orthogonale sur $F^{\perp}$ par $p_{F^{\perp}}(x) = \left\langle x, \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\rangle \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$ où $\vec{n}$ est un vecteur normal de l'hyperplan.
- le projeté orthogonal $p_F(x)$ sur un sev F de dimension finie dans $(E, \langle . ; . \rangle)$ est caractérisé par : $\begin{cases} p_F(x) \in F \\ x - p_F(x) \in F^{\perp} \end{cases}$
- choisir la démarche la plus adaptée selon le contexte pour déterminer une projection orthogonale :

  Méthode 1 : on détermine une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de F qu'on orthonormalise en $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ puis $p(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle \varepsilon_i, x \rangle \varepsilon_i$

  Méthode 1 bis : on calcule plutôt le projeté $q(x)$ sur $F^{\perp}$ (surtout lorsque $\dim F^{\perp}$ est petit) et on utilise : $p(x) = x - q(x)$

  Méthode 2 : on détermine une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de F et on cherche $p(x)$ sachant :

  $$p(x) \in F \Leftrightarrow \exists (\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n,\ p(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \quad \text{et} \quad x - p(x) \in F^{\perp} \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \langle x - p(x), e_i \rangle = 0$$

  qui donne n équations permettant de déterminer $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$

Remarque : la notion de symétrie orthogonale n'est pas directement au programme mais elle l'est indirectement comme symétrie vectorielle associée à un projecteur qui est une projection orthogonale.

III-2) Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie

- connaître la définition de la distance de x au sev F : $d(x, F) = \inf\left\{\|x - f\| \mid f \in F\right\}$
- savoir que si F est un sev de dimension finie de l'espace préhilbertien $(E, \langle ., . \rangle)$ alors $d(x, F) = \|x - p(x)\|$ où $p(x)$ est la projection orthogonale sur F de x et savoir que $p(x)$ est l'unique vecteur de F réalisant cela.
- savoir introduire et utiliser dans un problème de minimisation un calcul de distance d'un vecteur à un sev de dimension finie dans un espace préhilbertien. **Il faut bien préciser le contexte : l'espace euclidien $(E, \langle ., . \rangle)$, le sev F et le vecteur x**

On pourra consulter le TD n°1,le TD n°2 et le TD n°3 du chapitre IX

CHAPITRE X   SÉRIES ENTIÈRES

I) Généralités sur les séries entières

I-1) Définition et premiers exemples   I-2) Lemme d'Abel, rayon de convergence et somme d'une série entière
I-3) Calcul du rayon de convergence

Les élèves doivent :

- connaître la définition d'une série entière, des coefficients, du rayon de convergence et de la somme.
- connaître les notions de disque ouvert de convergence/ intervalle ouvert de convergence d'une série entière
- connaître et utiliser diverses méthodes pour déterminer le rayon de convergence (utilisation de convergence ponctuelle, de comparaison, d'un équivalent)
- savoir que les séries $\sum a_n z^n$, $\sum n a_n z^n$ et $\sum \frac{a_n}{n} z^n$ ont le même rayon de convergence
- savoir que les séries $\sum n^{\alpha} z^n$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ ont un rayon de convergence qui vaut 1

I-4) Opérations sur les séries entières

Les élèves doivent :

- connaître le résultat sur le rayon de convergence d'une somme de séries entières
- connaître le résultat sur le rayon de convergence et la somme d'un produit de Cauchy de deux séries entières

II) Propriétés de la somme d'une série entière d'une variable réelle

Les élèves doivent :

- distinguer l'intervalle ouvert de convergence et le domaine de définition de la somme d'une série entière
- savoir que la somme d'une série entière est C^0 sur son domaine de définition. *Ce résultat contient donc une formulation simplifié du théorème radial d'Abel que les élèves n'ont pas connaître dans toute sa généralité.*
- savoir que la somme d'une série entière est C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence
- savoir qu'on obtient la dérivée k ieme de la somme d'une série entière comme somme de la série entière où l'on a dérivé k fois termes à termes (théorème de dérivation terme à terme)
- savoir qu'on obtient une primitive de la somme d'une série entière en considérant la somme de la série entière où l'on a intégré terme à terme et savoir utiliser ce résultat pour calculer une intégrale d'une somme de série entière en permutant les symboles somme/intégrale
- retrouver et justifier les sommes de $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$. Les utiliser pour calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n}$, $|x| < 1$

Méthode :Calculs de rayon de convergence et calcul de somme (CL, dérivation ou intégration termes à termes, produit de Cauchy)

On pourra voir le point méthode et les exemples de référence d'utilisation des théorèmes.
et consulter les TD sur le chapitre X

Attention, la notion de fonction développable en série entière n'a pas été introduite.
Les élèves doivent, pour le moment, calculer des sommes de série entières en exploitant les théorèmes à partir des séries entières de référence (géométrique et exponentielle).
Attention, pas de résolution d'équations différentielles à l'aide de série entière cette semaine.

Attention, pas de formule du binôme généralisée cette semaine.

- ***Exercices*** :

- Tous les exemples et exercices chapitre IX auront été traités
- Les exemples 1 à 5 et les exercices 1 et 2 du chapitre X auront été traités

FIN