PROGRAMME DE KHÔLLE DE LA SEMAINE N°18

L'oral commencera avec une question de cours issue de la la liste des questions de cours associée à ce programme et sera évaluée sur 4 points. La réponse à cette question de cours doit être rapide et précise! (Pas plus de 20 minutes)

- **Cours** :

CHAPITRE VII FONCTIONS DE 2 OU 3 VARIABLES

Ce chapitre a été travaillé en classe inversée.

I) *Limites et continuité*

I-1) *Ensemble de définition* I-2) *Limites* I-3) *Continuité*

Les élèves doivent :

- savoir donner et représenter le domaine de définition d'une fonction de 2 ou 3 variables, savoir définir les applications partielles
- savoir définir la notion de limite d'une fonction de 2 ou 3 variables en un point adhérent au domaine de définition et éventuellement nier l'existence d'une limite en utilisant des directions partielles
- savoir définir la continuité d'une fonction de 2 ou 3 variables. La démonstration de la continuité en des singularités ponctuelles n'est pas un attendu du programme. Les élèves doivent toutefois pourvoir conclure à la continuité dans des cas simples où il suffit d'appliquer les théorèmes usuels à partir des fonctions de références (polynômiales, projection, etc...)
- savoir que, si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^p$ ($p \in \{2,3\}$) à valeurs réelles, alors $\{x \in \mathbb{R}^p \mid f(x) > 0\}$ et $\{x \in \mathbb{R}^p \mid f(x) < 0\}$ sont des parties ouvertes et $\{x \in \mathbb{R}^p \mid f(x) \geqslant 0\}$ et $\{x \in \mathbb{R}^p \mid f(x) = 0\}$ des parties fermées
- savoir qu'une fonction continue sur une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^p (p \in \{2,3\})$ à valeurs réelle est une fonction bornée qui atteint ses bornes

II) *Dérivées partielles du premier ordre et classe* C^1

Les élèves doivent :

- savoir définir les dérivées partielles premières et les calculer en dérivant selon une variable en gardant les autres constantes lorsque les théorèmes usuels s'appliquent
- savoir définir une dérivée partielle ponctuellement et la calculer à l'aide d'un taux d'accroissement en des points où le calcul avec les théorèmes usuels est compliqué ou impossible
- savoir définir le vecteur gradient noté $\nabla f(x) = \overrightarrow{grad} f(x)$ (on rappelle son utilité pour déterminer la normale à une courbe plane donnée par une équation cartésienne $f(x,y) = 0$)
- savoir définir la classe C^1 pour une fonction de plusieurs variables et justifier la classe C^1 d'une application à l'aide des théorèmes usuels et des fonctions de référence
- connaître la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 pour une fonction de plusieurs variables : elle garantie que la classe C^1 entraîne la continuité pour les fonctions de plusieurs variables

La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 n'est pas au programme pour l'instant

III) *Dérivées partielles du second ordre et classe* C^2

Les élèves doivent :

- savoir définir les dérivées partielles secondes et les calculer en dérivant selon une variable en gardant les autres constantes lorsque les théorèmes usuels s'appliquent
- savoir justifier qu'une fonction de plusieurs variables est de classe C^2 à l'aide des théorèmes usuels
- savoir que la classe C^2 entraîne la classe C^1 pour une fonction de plusieurs variables
- connaître et utiliser le théorème de Schwarz (égalité des dérivées croisées pour une fonction de classe C^2). En particulier, utiliser ce théorème pour nier qu'une fonction est de classe C^2 au voisinage d'un point)

IV) *Généralisation pour les fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$*

Les notions sont généralisées aux fonctions vectorielles : la régularité de l'application se lit sur les applications coordonnées

V) *Dérivées des fonctions composées*

Les élèves doivent

- connaître la notion de dérivée selon un vecteur $\vec{u}$ non nul d'une fonction $[f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}]$ en un point $a \in \mathcal{U}$

  il s'agit de la limite $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(a+t\vec{u})-f(a)}{t} = \langle \nabla f(a), u\rangle = \left\langle \overrightarrow{grad} f(a), u\right\rangle$ lorsqu'elle existe
- savoir calculer la dérivée d'une fonction $\quad [t \mapsto f\big(x_1(t),\dots,x_p(t)\big)] = f\circ\gamma(t) \quad$ où $\quad \gamma(t) = \big(x_1(t),\dots,x_p(t)\big)$
$$(f\circ\gamma)'(t) = \left\langle \overrightarrow{grad} f(\gamma(t)), \gamma'(t)\right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i'(t)\frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t))$$
- savoir calculer des dérivées partielles $[(u,v) \mapsto f\big(x(u,v), y(u,v)\big)]$ de fonctions composées

VI) *Exemples de résolutions d'équations aux dérivées partielles*

Extrait du programme : « *Exemples simples de résolutions d'équations aux dérivées partielles du premiers et du second ordres* »

On pourra consulter les TD n°1, TD n° 2 et TD n° 3 du chapitre VIII
et en particulier le point méthode pour les EDP au début du TD n°3

CHAPITRE IX ESPACES PRÉHILBERTIENS ET EUCLIDIENS

I) *Produit scalaire et norme*

Les élèves doivent :

- savoir définir un produit scalaire et un espace préhilbertien/euclidien
- vérifier, dans une situation concrète, qu'une application donnée est un produit scalaire
- connaître les produits scalaires usuels de $\mathbb{R}^n$ et $C^0([a,b],\mathbb{R})$. Les élèves ont rencontré des produits scalaires sur $\mathbb{R}_n[X]$, sur $M_n(\mathbb{R})$ (exprimé à l'aide de la trace et des coefficients) ainsi que sur les suites de carrées sommables $\ell_2(\mathbb{R})$ ou les fonctions de carrées intégrables $L_2(I,\mathbb{R})$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
- savoir définir la norme et la distance associées à un produit scalaire
- connaître et savoir utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité triangulaire dans un espace préhilbertien
- connaître et savoir utiliser l'identité du parallélogramme et les identités de polarisation dans un espace préhilbertien

II) *Orthogonalité dans un espace euclidien*

II-1) Vecteurs orthogonaux et théorème de Pythagore* et *II-5) Sev orthogonaux et orthogonal d'un sev Les élèves doivent :

- savoir définir l'orthogonalité entre 2 vecteurs ou l'orthogonalité d'une famille de vecteurs dans un espace préhilbertien
- savoir utiliser (et savoir redémontrer) qu'une famille orthogonale de vecteurs non nuls dans un espace préhilbertien est une famille libre
- connaître et savoir utiliser le théorème de Pythagore
- connaître la définition de deux sev orthogonaux et de l'orthogonal $F^\perp$ d'un sev F
- savoir que deux sev orthogonaux F et G sont en somme directe (autrement dit $F \cap G = \{0_E\}$)
- savoir que $\quad F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp, \quad \{0_E\}^\perp = E \quad$ et $\quad E^\perp = \{0_E\}$
- savoir que $F \subset (F^\perp)^\perp$ et que F et $F^\perp$ sont en somme directe (autrement dit $F \oplus F^\perp \subset E$)

Attention ! Si F n'est pas de dimension finie, les inclusions $\quad F \oplus F^\perp \subset E \quad$ **et** $\quad F \subset (F^\perp)^\perp \quad$ **peuvent être stricte**

- si $\dim F < +\infty$, savoir déterminer $F^\perp$ en utilisant une famille génératrice $(e_1, \dots, e_n)$ de F :

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall i \in [\![1,n]\!],\ \langle x, e_i \rangle = 0\}$$

II-3) Famille orthonormale et procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Les élèves doivent

- savoir définir et caractériser une famille orthonormale ($(x_i)_{i\in I}$ est orthonormale si $\forall (i,j) \in I^2$, $\langle x_i, x_j \rangle = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$

  La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$

  La base canonique de $M_n(\mathbb{R})$ est orthonormée pour le produit scalaire $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$

  La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est orthonormée pour le produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$

- **Algorithme de Gram-Schmidt** (avec une condition d'unicité) :

  - les élèves doivent savoir énoncer le théorème de Gram-Schmidt :

  « On peut construire une unique famille orthonormale $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)$ à partir d'une famille libre $(e_1, \dots, e_N)$ vérifiant

  i) $\forall n \in [\![1,N]\!]$, $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ et ii) $\forall n \in [\![1,N]\!]$, $\langle e_n, \varepsilon_n \rangle > 0$ »

  - les élèves doivent savoir concrètement mettre en œuvre l'algorithme sur une famille avec un nombre « raisonnable » de vecteurs (pas de justification à faire de la démarche suivie).

  La rédaction proposée pour construire $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ à partir de $(e_1, \dots, e_n)$ est :

  - Etape n° 1 : $\varepsilon_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$

    Etape n° 2 : $\varepsilon_2 = \dfrac{u_2}{\|u_2\|}$ où $u_2 = e_2 - \langle e_2, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1$ Etape n° 3 : $\varepsilon_3 = \dfrac{u_3}{\|u_3\|}$ où $u_2 = e_3 - (\langle e_3, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 + \langle e_3, \varepsilon_2 \rangle \varepsilon_2)$

  Ces étapes peuvent s'interprêter avec la notion de projection orthogonale :

  Etape n° 2 : La projection orthogonale de e_2 sur $F_1 = \mathrm{Vect}(e_1) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1)$ est $p(e_2) = \langle e_2, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1$

  aussi $u_2 = e_2 - p(e_2)$ dirige la droite orthogonale à F_1 dans $F_2 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ donc $\varepsilon_2 = \dfrac{u_2}{\|u_2\|}$

  Etape n° 3 : La projection orthogonale de e_3 sur $F_2 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est $p(e_3) = \langle e_3, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 + \langle e_3, \varepsilon_2 \rangle \varepsilon_2$

  aussi $u_3 = e_3 - p(e_3)$ dirige la droite orthogonale à F_2 dans $F_3 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ donc $\varepsilon_3 = \dfrac{u_3}{\|u_3\|}$

II-4) Orthogonalité dans un espace euclidien et *II-5) Supplémentaire orthogonal d'un sev de dimension finie*

Les élèves doivent

- savoir qu'il existe des bases orthonormées dans un sev de dimension finie d'un espace préhilbertien et pourvoir en déterminer une par mise en œuvre de l'algorithme de Gram-Schmidt
- savoir mener les calculs de produit scalaire, de norme à l'aide des coordonnées dans une base orthonormée

  Dans une BON, le calcul peut se mener directement sur les coordonnées comme usuellement dans $\mathbb{R}^n$

- savoir que, si $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base orthonormée de E : $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$ pour tout vecteur x de E

III) Projection orthogonale en dimension finie

III-1) Projection orthogonale sur un sev de dimension finie

Les élèves doivent savoir que

- Si $\dim F < +\infty$ alors F et $F^\perp$ sont supplémentaire dans E. Ainsi, si E est euclidien : $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$
- Si F est un hyperplan dont on dispose une équation $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ dans une base orthonormée, alors $F^\perp$ est une droite dirigée par le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(a_1, \dots, a_n)$ qu'on appelle vecteur normal à l'hyperplan.
- si F est un sev de dim finie de $\big(E, \langle .;. \rangle\big)$, la projection orthogonale p_F sur F est le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$
- une application $f : E \to E$ est une projection orthogonale lorsque $\begin{cases} f \in \mathscr{L}(E) \\ f \circ f = f \\ \text{Ker } f \text{ et Im } f \text{ sont orthogonaux} \end{cases}$
- si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de F, on a, pour tout x de E, $p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x \rangle e_i$

- si F est un hyperplan, on utilise $p_F(x) = x - p_{F^\perp}(x)$ où on calcule facilement la projection orthogonale sur $F^\perp$ par $p_{F^\perp}(x) = \left\langle x, \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\rangle \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$ où $\vec{n}$ est un vecteur normal de l'hyperplan.

- le projeté orthogonal $p_F(x)$ sur un sev F de dimension finie dans $(E, \langle .;. \rangle)$ est caractérisé par : $\begin{cases} p_F(x) \in F \\ x - p_F(x) \in F^\perp \end{cases}$

- choisir la démarche la plus adaptée selon le contexte pour déterminer une projection orthogonale :

  Méthode 1 : on détermine une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de F qu'on orthonormalise en $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ puis $p(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle \varepsilon_i, x \rangle \varepsilon_i$

  Méthode 1 bis : on calcule plutôt le projeté $q(x)$ sur $F^\perp$ (surtout lorsque $\dim F^\perp$ est petit) et on utilise : $p(x) = x - q(x)$

  Méthode 2 : on détermine une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de F et on cherche $p(x)$ sachant :

$$p(x) \in F \Leftrightarrow \exists (\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n,\ p(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \quad \text{et} \quad x - p(x) \in F^\perp \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \langle x - p(x), e_i \rangle = 0$$

qui donne n équations permettant de déterminer $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$

Remarque : la notion de symétrie orthogonale n'est pas directement au programme mais elle l'est indirectement comme symétrie vectorielle associée à un projecteur qui est une projection orthogonale.

III-2) Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie

- connaître la définition de la distance de x au sev F : $d(x, F) = \inf\left\{\|x - f\| \mid f \in F\right\}$
- savoir que si F est un sev de dimension finie de l'espace préhilbertien $(E, \langle ., . \rangle)$ alors $d(x, F) = \|x - p(x)\|$ où $p(x)$ est la projection orthogonale sur F de x et savoir que $p(x)$ est l'unique vecteur de F réalisant cela.
- savoir introduire et utiliser dans un problème de minimisation un calcul de distance d'un vecteur à un sev de dimension finie dans un espace préhilbertien. **Il faut bien préciser le contexte : l'espace euclidien** $(E, \langle ., . \rangle)$**, le sev** F **et le vecteur** x

On pourra consulter les TD n°1 et TD n° 2 du chapitre IX

- ***Exercices*** :

- Tous les exemples et exercices chapitre VIII auront été traités.
- Tous les exemples et exercices chapitre IX auront été traités (certains des derniers exercices seront peut-être terminé lundi matin)

FIN