PROGRAMME DE KHÔLLE DE LA SEMAINE N°18

L'oral commencera avec une question de cours issue de la la liste des questions de cours associée à ce programme et sera évaluée sur 4 points. La réponse à cette question de cours doit être rapide et précise! (Pas plus de 20 minutes)

• ***Cours*** : **CHAPITRE VII** FONCTIONS DE 2 OU 3 VARIABLES

Ce chapitre a été travaillé en classe inversée.

I) Limites et continuité

I-1) Ensemble de définition *I-2) Limites* *I-3) Continuité*

Les élèves doivent :

— savoir donner et représenter le domaine de définition d'une fonction de 2 ou 3 variables, savoir définir les applications partielles

— savoir définir la notion de limite d'une fonction de 2 ou 3 variables en un point adhérent au domaine de définition et éventuellement nier l'existence d'une limite en utilisant des directions partielles

— savoir définir la continuité d'une fonction de 2 ou 3 variables. La démonstration de la continuité en des singularités ponctuelles n'est pas un attendu du programme. Les élèves doivent toutefois pourvoir conclure à la continuité dans des cas simples où il suffit d'appliquer les théorèmes usuels à partir des fonctions de références (polynômiales, projection, etc...)

— savoir que, si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^p$ ($p \in \{2,3\}$) à valeurs réelles, alors $\{x \in \mathbb{R}^p \mid f(x) > 0\}$ et $\{x \in \mathbb{R}^p \mid f(x) < 0\}$ sont des parties ouvertes et $\{x \in \mathbb{R}^p \mid f(x) \geqslant 0\}$ et $\{x \in \mathbb{R}^p \mid f(x) = 0\}$ des parties fermées

— savoir qu'une fonction continue sur une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^p$ ($p \in \{2,3\}$) à valeurs réelle est une fonction bornée qui atteint ses bornes

II) Dérivées partielles du premier ordre et classe C^1

Les élèves doivent :

— savoir définir les dérivées partielles premières et les calculer en dérivant selon une variable en gardant les autres constantes lorsque les théorèmes usuels s'appliquent

— savoir définir une dérivée partielle ponctuellement et la calculer à l'aide d'un taux d'accroissement en des points où le calcul avec les théorèmes usuels est compliqué ou impossible

— savoir définir le vecteur gradient noté $\nabla f(x) = \overrightarrow{grad} f(x)$ (on rappelle son utilité pour déterminer la normale à une courbe plane donnée par une équation cartésienne $f(x,y) = 0$)

— savoir définir la classe C^1 pour une fonction de plusieurs variables et justifier la classe C^1 d'une application à l'aide des théorèmes usuels et des fonctions de référence

— connaître la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 pour une fonction de plusieurs variables : elle garantie que la classe C^1 entraîne la continuité pour les fonctions de plusieurs variables

La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 n'est pas au programme pour l'instant

III) Dérivées partielles du second ordre et classe C^2

Les élèves doivent :

— savoir définir les dérivées partielles secondes et les calculer en dérivant selon une variable en gardant les autres constantes lorsque les théorèmes usuels s'appliquent

— savoir justifier qu'une fonction de plusieurs variables est de classe C^2 à l'aide des théorèmes usuels

— savoir que la classe C^2 entraîne la classe C^1 pour une fonction de plusieurs variables

— connaître et utiliser le théorème de Schwarz (égalité des dérivées croisées pour une fonction de classe C^2). En particulier, utiliser ce théorème pour nier qu'une fonction est de classe C^2 au voisinage d'un point)

IV) Généralisation pour les fonctions de $\mathbb{R}^p$ *dans* $\mathbb{R}^n$

Les notions sont généralisées aux fonctions vectorielles : la régularité de l'application se lit sur les applications coordonnées

V) *Dérivées des fonctions composées*

Les élèves doivent

- connaître la notion de dérivée selon un vecteur $\vec{u}$ non nul d'une fonction $[f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}]$ en un point $a \in \mathcal{U}$

  il s'agit de la limite $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f(a+t\vec{u})-f(a)}{t} = \langle \nabla f(a), u\rangle = \left\langle \overrightarrow{grad} f(a), u \right\rangle$ lorsqu'elle existe
- savoir calculer la dérivée d'une fonction $[t \mapsto f\big(x_1(t),\dots,x_p(t)\big)] = f\circ\gamma(t)$ où $\gamma(t) = \big(x_1(t),\dots,x_p(t)\big)$

$$(f\circ\gamma)'(t) = \left\langle \overrightarrow{grad} f(\gamma(t)), \gamma'(t)\right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i'(t)\frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t))$$

- savoir calculer des dérivées partielles $[(u,v)\mapsto f\big(x(u,v),y(u,v)\big)]$ de fonctions composées

VI) *Exemples de résolutions d'équations aux dérivées partielles*

Extrait du programme : « *Exemples simples de résolutions d'équations aux dérivées partielles du premiers et du second ordres* »

On pourra consulter les TD n°1, TD n° 2 et TD n° 3 du chapitre 8
et en particulier le point méthode pour les EDP au début du TD n°3

CHAPITRE IX ESPACES PRÉHILBERTIENS ET EUCLIDIENS

I) *Produit scalaire et norme*

Les élèves doivent :

- savoir définir un produit scalaire et un espace préhilbertien/euclidien
- vérifier, dans une situation concrète, qu'une application donnée est un produit scalaire
- connaître les produits scalaires usuels de $\mathbb{R}^n$ et $\mathrm{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Les élèves ont rencontré des produits scalaires sur $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ (exprimé à l'aide de la trace et des coefficients) ainsi que sur les suites de carrées sommables $\ell_2(\mathbb{R})$ ou les fonctions de carrées intégrables $\mathrm{L}_2(\mathrm{I},\mathbb{R})$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
- savoir définir la norme et la distance associées à un produit scalaire
- connaître et savoir utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité triangulaire dans un espace préhilbertien
- connaître et savoir utiliser l'identité du parallélogramme et les identités de polarisation dans un espace préhilbertien

II) *Orthogonalité dans un espace euclidien*

II-1) Vecteurs orthogonaux et théorème de Pythagore **et** ***II-5) Sev orthogonaux et orthogonal d'un sev*** Les élèves doivent :

- savoir définir l'orthogonalité entre 2 vecteurs ou l'orthogonalité d'une famille de vecteurs dans un espace préhilbertien
- savoir utiliser (et savoir redémontrer) qu'une famille orthogonale de vecteurs non nuls dans un espace préhilbertien est une famille libre
- connaître et savoir utiliser le théorème de Pythagore
- connaître la définition de deux sev orthogonaux et de l'orthogonal $\mathrm{F}^\perp$ d'un sev F
- savoir que deux sev orthogonaux F et G sont en somme directe (autrement dit $\mathrm{F}\cap\mathrm{G} = \{0_\mathrm{E}\}$)
- savoir que $\mathrm{F}\subset\mathrm{G} \Rightarrow \mathrm{G}^\perp\subset\mathrm{F}^\perp$, $\{0_\mathrm{E}\}^\perp = \mathrm{E}$ et $\mathrm{E}^\perp = \{0_\mathrm{E}\}$
- savoir que $\mathrm{F}\subset(\mathrm{F}^\perp)^\perp$ et que F et $\mathrm{F}^\perp$ sont en somme directe (autrement dit $\mathrm{F}\oplus\mathrm{F}^\perp\subset\mathrm{E}$)

  Attention ! Si F **n'est pas de dimension finie, les inclusions** $\mathrm{F}\oplus\mathrm{F}^\perp\subset\mathrm{E}$ **et** $\mathrm{F}\subset(\mathrm{F}^\perp)^\perp$ **peuvent être stricte**
- si $\dim\mathrm{F} < +\infty$, savoir déterminer $\mathrm{F}^\perp$ en utilisant une famille génératrice $(e_1,\dots,e_n)$ de F :

$$\mathrm{F}^\perp = \{x\in\mathrm{E} \mid \forall i\in[\![1,n]\!],\ \langle x, e_i\rangle = 0\}$$

II-3) Famille orthonormale et procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Les élèves doivent

- savoir définir et caractériser une famille orthonormale ($(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est orthonormale si $\forall(i,j)\in\mathrm{I}^2$, $\left\langle x_i, x_j\right\rangle = \begin{cases} 0 \text{ si } i\neq j \\ 1 \text{ si } i=j\end{cases}$

  La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$

  La base canonique de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est orthonormée pour le produit scalaire $\langle \mathrm{A},\mathrm{B}\rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{A}^\mathrm{T}\mathrm{B})$

  La base canonique de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ est orthonormée pour le produit scalaire $\langle \mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ si $\mathrm{P} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\mathrm{X}^k$ et $\mathrm{Q} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k\mathrm{X}^k$

— **Algorithme de Gram-Schmidt** (avec une condition d'unicité) :
- les élèves doivent savoir énoncer le théorème de Gram-Schmidt :
« On peut construire une unique famille orthonormale $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_N)$ à partir d'une famille libre $(e_1,\dots,e_N)$ vérifiant
i) $\forall n \in [\![1,N]\!]$, $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)=\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)$ et ii) $\forall n \in [\![1,N]\!]$, $\langle e_n,\varepsilon_n\rangle>0$ »
- les élèves doivent savoir concrètement mettre en œuvre l'algorithme sur une famille avec un nombre « raisonnable » de vecteurs (pas de justification à faire de la démarche suivie).
La rédaction proposée pour construire $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)$ à partir de $(e_1,\dots,e_n)$ est :
- Etape n° 1 : $\varepsilon_1=\dfrac{e_1}{\|e_1\|}$
Etape n° 2 : $\varepsilon_2=\dfrac{u_2}{\|u_2\|}$ où $u_2=e_2-\langle e_2,\varepsilon_1\rangle\varepsilon_1$ Etape n° 3 : $\varepsilon_3=\dfrac{u_3}{\|u_3\|}$ où $u_2=e_3-(\langle e_3,\varepsilon_1\rangle\varepsilon_1+\langle e_3,\varepsilon_2\rangle\varepsilon_2)$

Ces étapes peuvent s'interpréter avec la notion de projection orthogonale :
Etape n° 2 : La projection orthogonale de e_2 sur $F_1=\mathrm{Vect}(e_1)=\mathrm{Vect}(\varepsilon_1)$ est $p(e_2)=\langle e_2,\varepsilon_1\rangle\varepsilon_1$
aussi $u_2=e_2-p(e_2)$ dirige la droite orthogonale à F_1 dans $F_2=\mathrm{Vect}(e_1,e_2)$ donc $\varepsilon_2=\dfrac{u_2}{\|u_2\|}$
Etape n° 3 : La projection orthogonale de e_3 sur $F_2=\mathrm{Vect}(e_1,e_2)=\mathrm{Vect}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ est $p(e_3)=\langle e_3,\varepsilon_1\rangle\varepsilon_1+\langle e_3,\varepsilon_2\rangle\varepsilon_2$
aussi $u_3=e_3-p(e_3)$ dirige la droite orthogonale à F_2 dans $F_3=\mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_3)$ donc $\varepsilon_3=\dfrac{u_3}{\|u_3\|}$

II-4) Orthogonalité dans un espace euclidien et *II-5) Supplémentaire orthogonal d'un sev de dimension finie*

Les élèves doivent
- savoir qu'il existe des bases orthonormées dans un sev de dimension finie d'un espace préhilbertien et pourvoir en déterminer une par mise en œuvre de l'algorithme de Gram-Schmidt
- savoir mener les calculs de produit scalaire, de norme à l'aide des coordonnées dans une base orthonormée
Dans une BON, le calcul peut se mener directement sur les coordonnées comme usuellement dans $\mathbb{R}^n$
- savoir que, si $\mathscr{B}=(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base orthonormée de E : $x=\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i$ pour tout vecteur x de E

III) Projection orthogonale en dimension finie

III-1) Projection orthogonale sur un sev de dimension finie

Les élèves doivent savoir que
- Si $\dim F<+\infty$ alors F et $F^\perp$ sont supplémentaire dans E. Ainsi, si E est euclidien : $\dim F^\perp=\dim E-\dim F$
- Si F est un hyperplan dont on dispose une équation $a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0$ dans une base orthonormée, alors $F^\perp$ est une droite dirigée par le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(a_1,\dots,a_n)$ qu'on appelle vecteur normal à l'hyperplan.
- si F est un sev de dim finie de $\big(E,\langle .;.\rangle\big)$, la projection orthogonale p_F sur F est le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$
- une application $f:E\to E$ est une projection orthogonale lorsque $\begin{cases} f\in\mathscr{L}(E)\\ f\circ f=f\\ \text{Ker } f \text{ et Im } f \text{ sont orthogonaux}\end{cases}$
- si $(e_1,\dots,e_n)$ est une base orthonormée de F, on a, pour tout x de E, $p_F(x)=\sum_{i=1}^{n}\langle e_i,x\rangle e_i$
- si F est un hyperplan, on utilise $p_F(x)=x-p_{F^\perp}(x)$ où on calcule facilement la projection orthogonale sur $F^\perp$ par $p_{F^\perp}(x)=\left\langle x,\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\right\rangle\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$ où $\vec{n}$ est un vecteur normal de l'hyperplan.
- le projeté orthogonal $p_F(x)$ sur un sev F de dimension finie dans $\big(E,\langle .;.\rangle\big)$ est caractérisé par : $\begin{cases} p_F(x)\in F\\ x-p_F(x)\in F^\perp\end{cases}$
- choisir la démarche la plus adaptée selon le contexte pour déterminer une projection orthogonale :
Méthode 1 : on détermine une base $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ de F qu'on orthonormalise en $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ puis $p(x)=\sum_{i=1}^{n}\langle\varepsilon_i,x\rangle\varepsilon_i$
Méthode 1 bis : on calcule plutôt le projeté $q(x)$ sur $F^\perp$ (surtout lorsque $\dim F^\perp$ est petit) et on utilise : $p(x)=x-q(x)$
Méthode 2 : on détermine une base $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ de F et on cherche $p(x)$ sachant :
$$p(x)\in F \Leftrightarrow \exists(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in\mathbb{R}^n,\ p(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie_i \quad\text{et}\quad x-p(x)\in F^\perp \Leftrightarrow \forall i\in[\![1,n]\!],\ \big\langle x-p(x),e_i\big\rangle=0$$
qui donne n équations permettant de déterminer $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$

Remarque : la notion de symétrie orthogonale n'est pas directement au programme mais elle l'est indirectement comme symétrie vectorielle associée à un projecteur qui est une projection orthogonale.

III-2) ***<u>Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie</u>***

— connaître la définition de la distance de x au sev F : $d(x,\mathrm{F}) = \inf\left\{\|x-f\| \mid f \in \mathrm{F}\right\}$

— savoir que si F est un sev de dimension finie de l'espace préhilbertien $\left(\mathrm{E},\langle .,.\rangle\right)$ alors $d(x,\mathrm{F}) = \|x-p(x)\|$ où $p(x)$ est la projection orthogonale sur F de x et savoir que $p(x)$ est l'unique vecteur de F réalisant cela.

— savoir introduire et utiliser dans un problème de minimisation un calcul de distance d'un vecteur à un sev de dimension finie dans un espace préhilbertien. **Il faut bien préciser le contexte : l'espace euclidien** $\left(\mathrm{E},\langle .,.\rangle\right)$**, le sev** F **et le vecteur** x

On pourra consulter les TD n°1 et TD n°2 du chapitre IX
Le Td n°3 de lundi permettra de terminer les exercices

• ***Exercices*** :

- Tous les exemples et exercices chapitre VIII auront été traités.
- Tous les exemples et exercices chapitre IX auront été traités (fin de exemple 7, fin de exercice 2, exercice 3 et exercice 4 traitées lundi)

FIN