PROGRAMME DE KHÔLLE DE LA SEMAINE N°17

L'oral commencera avec une question de cours issue de la la liste des questions de cours associée à ce programme et sera évaluée sur 4 points. La réponse à cette question de cours doit être rapide et précise! (Pas plus de 20 minutes)

• **Cours** :

CHAPITRE VII INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

La totalité du chapitre et, plus particulièrement, les points suivants

III) Fonction intégrable ou intégrale absolument convergent sur un intervalle quelconque

III-1) Convergence absolue et intégrabilité

Les élèves doivent :

- définir la notion d'intégrabilité d'une fonction f sur I ou d'absolue convergence de l'intégrale $\int_{\mathrm{I}} f(t)\,\mathrm{d}t$
- savoir que la convergence absolue/intégrabilité implique la convergence de l'intégrale mais qu'il n'y a pas de réciproque
- connaître les exemples de références avec CNS d'intégrabilité (Riemann en 0, en $+\infty$ ou en $a \in \mathbb{R}$, exponentielle en $+\infty$, logrithme en 0) ainsi que le contre-exemple d'intégrale semi-convergente $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$
- manipuler les diverses notations $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t, \int_{[a,b[} f(t)\,\mathrm{d}t, \int_{[a,b[} f$ généralisable à tout type d'intervalle I de $\mathbb{R}$

III-2) Les théorèmes de convergence absolue

Les élèves doivent :

- connaître l'espace $\mathrm{L}_1(\mathrm{I},\mathbb{K})$ des fonctions intégrables sur l'intervalle I et savoir que c'est un sous-espace vectoriel sur lequel l'application $\left[f \mapsto \int_{\mathrm{I}} f\right]$ est linéaire
- connaître l'inégalité triangulaire qui ne peut s'écrire que dans le cadre de l'absolue convergence
- connaître les théorèmes de comparaison (majoration, règle du o ou O, critère d'équivalence) compatibles avec l'absolue convergence.

III-3) Intégrations terme à terme

Les élèves doivent :
- pourvoir énoncer le théorème d'intégration terme à terme tel que donné par le programme (voir cours)
- savoir mettre en application le théorème en mettant bien en avant la justification de chacune des hypothèses
- savoir qu'en l'absence d'une des hypothèses et même si les deux termes existent, il peut ne pas y avoir égalité entre l'intégrale d'un somme de série et la somme de la série intégrée terme à terme.

Une méthodologie ainsi qu'une carte mentale pour les intégrales généralisées ont été dégagées.

On pourra consulter le TD n° 2 (justifier la convergence avec intégrabilité, changement de variables)
et le TD n° 3 (théorème d'intégration terme à terme) du chapitre 7

Ce chapitre a été travaillé en classe inversée.

I) *Limites et continuité*

I-1) *Ensemble de définition* I-2) *Limites* I-3) *Continuité*

Les élèves doivent :

- savoir donner et représenter le domaine de définition d'une fonction de 2 ou 3 variables, savoir définir les applications partielles
- savoir définir la notion de limite d'une fonction de 2 ou 3 variables en un point adhérent au domaine de définition et éventuellement nier l'existence d'une limite en utilisant des directions partielles
- savoir définir la continuité d'une fonction de 2 ou 3 variables. La démonstration de la continuité en des singularités ponctuelles n'est pas un attendu du programme. Les élèves doivent toutefois pourvoir conclure à la continuité dans des cas simples où il suffit d'appliquer les théorèmes usuels à partir des fonctions de références (polynômiales, projection, etc...)
- savoir que, si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^p$ ($p \in \{2,3\}$) à valeurs réelles, alors $\{x \in \mathbb{R}^p \mid f(x) > 0\}$ et $\{x \in \mathbb{R}^p \mid f(x) < 0\}$ sont des parties ouvertes et $\{x \in \mathbb{R}^p \mid f(x) \geqslant 0\}$ et $\{x \in \mathbb{R}^p \mid f(x) = 0\}$ des parties fermées
- savoir qu'une fonction continue sur une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^p (p \in \{2,3\})$ à valeurs réelle est une fonction bornée qui atteint ses bornes

II) *Dérivées partielles du premier ordre et classe* C^1

Les élèves doivent :

- savoir définir les dérivées partielles premières et les calculer en dérivant selon une variable en gardant les autres constantes lorsque les théorèmes usuels s'appliquent
- savoir définir une dérivée partielle ponctuellement et la calculer à l'aide d'un taux d'accroissement en des points où le calcul avec les théorèmes usuels est compliqué ou impossible
- savoir définir le vecteur gradient noté $\nabla f(x) = \overrightarrow{grad} f(x)$ (on rappelle son utilité pour déterminer la normale à une courbe plane donnée par une équation cartésienne $f(x,y) = 0$)
- savoir définir la classe C^1 pour une fonction de plusieurs variables et justifier la classe C^1 d'une application à l'aide des théorèmes usuels et des fonctions de référence
- connaître la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 pour une fonction de plusieurs variables : elle garantie que la classe C^1 entraîne la continuité pour les fonctions de plusieurs variables

La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 n'est pas au programme pour l'instant

III) *Dérivées partielles du second ordre et classe* C^2

Les élèves doivent :

- savoir définir les dérivées partielles secondes et les calculer en dérivant selon une variable en gardant les autres constantes lorsque les théorèmes usuels s'appliquent
- savoir justifier qu'une fonction de plusieurs variables est de classe C^2 à l'aide des théorèmes usuels
- savoir que la classe C^2 entraîne la classe C^1 pour une fonction de plusieurs variables
- connaître et utiliser le théorème de Schwarz (égalité des dérivées croisées pour une fonction de classe C^2). En particulier, utiliser ce théorème pour nier qu'une fonction est de classe C^2 au voisinage d'un point)

IV) *Généralisation pour les fonctions de* $\mathbb{R}^p$ *dans* $\mathbb{R}^n$

Les notions sont généralisées aux fonctions vectorielles : la régularité de l'application se lit sur les applications coordonnées

V) *Dérivées des fonctions composées*

Les élèves doivent

- connaître la notion de dérivée selon un vecteur $\vec{u}$ non nul d'une fonction $[f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}]$ en un point $a \in \mathcal{U}$

il s'agit de la limite $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f(a+t\vec{u})-f(a)}{t} = \langle \nabla f(a), u\rangle = \left\langle \overrightarrow{grad} f(a), u\right\rangle$ lorsqu'elle existe

- savoir calculer la dérivée d'une fonction $[t \mapsto f\big(x_1(t),\dots,x_p(t)\big)] = f\circ\gamma(t)$ où $\gamma(t) = \big(x_1(t),\dots,x_p(t)\big)$

$$(f\circ\gamma)'(t) = \left\langle \overrightarrow{grad} f(\gamma(t)), \gamma'(t)\right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i'(t)\frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t))$$

- savoir calculer des dérivées partielles $[(u,v) \mapsto f\big(x(u,v), y(u,v)\big)]$ de fonctions composées

VI) *Exemples de résolutions d'équations aux dérivées partielles*

Extrait du programme : « *Exemples simples de résolutions d'équations aux dérivées partielles du premiers et du second ordres* »

On pourra consulter les TD n°1 et TD n°2 sur ce chapitre VIII

CHAPITRE IX ESPACES PRÉHILBERTIENS ET EUCLIDIENS

I) *Produit scalaire et norme*

Les élèves doivent :

- savoir définir un produit scalaire et un espace préhilbertien/euclidien
- vérifier, dans une situation concrète, qu'une application donnée est un produit scalaire
- connaître les produits scalaires usuels de $\mathbb{R}^n$ et $C^0([a,b],\mathbb{R})$. Les élèves ont rencontré des produits scalaires sur $\mathbb{R}_n[X]$, sur $M_n(\mathbb{R})$ (exprimé à l'aide de la trace et des coefficients) ainsi que sur les suites de carrées sommables $\ell_2(\mathbb{R})$ ou les fonctions de carrées intégrables $L_2(I,\mathbb{R})$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
- savoir définir la norme et la distance associées à un produit scalaire
- connaître et savoir utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité triangulaire dans un espace préhilbertien
- connaître et savoir utiliser l'identité du parallélogramme et les identités de polarisation dans un espace préhilbertien

II) *Orthogonalité dans un espace euclidien*

Les élèves doivent :

- savoir définir l'orthogonalité entre 2 vecteurs ou l'orthogonalité d'une famille de vecteurs dans un espace préhilbertien
- savoir utiliser (et savoir redémontrer) qu'une famille orthogonale de vecteurs non nuls dans un espace préhilbertien est une famille libre
- connaître et savoir utiliser le théorème de Pythagore
- connaître la définition de deux sev orthogonaux et de l'orthogonal $F^\perp$ d'un sev F
- savoir que deux sev orthogonaux F et G sont en somme directe (autrement dit $F\cap G = \{0_E\}$)
- savoir que $F\subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$, $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$
- savoir que $F \subset (F^\perp)^\perp$ et que F et $F^\perp$ sont en somme directe (autrement dit $F\oplus F^\perp \subset E$)

Attention ! Si F n'est pas de dimension finie, les inclusions $F\oplus F^\perp \subset E$ et $F\subset (F^\perp)^\perp$ peuvent être stricte

- si $\dim F < +\infty$, savoir déterminer $F^\perp$ en utilisant une famille génératrice $(e_1,\dots,e_n)$ de F :

$$F^\perp = \{x\in E \mid \forall i \in [\![1,n]\!],\ \langle x, e_i\rangle = 0\}$$

Pas d'algorithme de Gram-Schmidt cette semaine
Les élèves ne disposent pas encore du résultat : si $\dim F < +\infty$ **alors** $F \oplus F^{\perp} = E$
Pas de projection orthogonale, de distance à un sev cette semaine

- $\boxed{\textbf{\textit{Exercices}}}$:

- Tous les exemples et les exercices du chapitre VII auront été traités.
- Tous les exemples et exercices chapitre VIII auront été traités.
- Tous les exemples de produit scalaires et les exemple 1 et 2 du chapitre IX auront été traités.

$\boxed{\text{FIN}}$