

L'oral commencera avec une question de cours issue de la la liste des **questions de cours** associée à ce programme et sera évaluée sur 4 points. La réponse à cette question de cours doit être rapide et précise! (Pas plus de 20 minutes)

• **Cours** :

CHAPITRE VII INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

La totalité du chapitre et, plus particulièrement, les points suivants

II-3) Intégration par parties

Les élèves doivent savoir réaliser une IPP sur une intégrale généralisée :

- elle n'est réalisable que si 2 termes sur les 3 convergent
- si la partie $[u(t)v(t)]_a^b$ est convergente, alors les intégrales pré-IPP et post-IPP ont la même nature et le calcul est possible
- si la partie $[u(t)v(t)]_a^b$ est divergente, il peut être pertinent de mener une IPP sur un segment et de passer ensuite à la limite car il peut y avoir des compensations

II-4) Changement de variables

Les élèves doivent savoir réaliser un changement de variables sur une intégrale généralisée :

- soit pour déterminer la nature d'une intégrale en étudiant la nature de l'intégrale post-changement de variables
- soit pour transformer une intégrale qu'on sait convergente (afin éventuellement d'en calculer la valeur)

III-3) Intégrations terme à terme

Les élèves doivent :

- pouvoir énoncer le théorème d'intégration terme à terme tel que donné par le programme (voir cours)
- savoir mettre en application le théorème en mettant bien en avant la justification de chacune des hypothèses
- savoir qu'en l'absence d'une des hypothèses et même si les deux termes existent, il peut ne pas y avoir égalité entre l'intégrale d'un somme de série et la somme de la série intégrée terme à terme.

On pourra consulter le **TD n° 3** du chapitre VII

CHAPITRE VIII FONCTIONS DE 2 OU 3 VARIABLES

Ce chapitre a été travaillé en classe inversée.

I) Limites et continuité

I-1) Ensemble de définition I-2) Limites I-3) Continuité

Les élèves doivent :

- savoir donner et représenter le domaine de définition d'une fonction de 2 ou 3 variables, savoir définir les applications partielles
- savoir définir la notion de limite d'une fonction de 2 ou 3 variables en un point adhérent au domaine de définition et éventuellement nier l'existence d'une limite en utilisant des directions partielles
- savoir définir la continuité d'une fonction de 2 ou 3 variables. La démonstration de la continuité en des singularités ponctuelles n'est pas un attendu du programme. Les élèves doivent toutefois pouvoir conclure à la continuité dans des cas simples où il suffit d'appliquer les théorèmes usuels à partir des fonctions de références (polynômiales, projection, etc...)
- savoir que, si f est une fonction continue sur \mathbb{R}^p ($p \in \{2, 3\}$) à valeurs réelles, alors $\{x \in \mathbb{R}^p \mid f(x) > 0\}$ et $\{x \in \mathbb{R}^p \mid f(x) < 0\}$ sont des parties ouvertes et $\{x \in \mathbb{R}^p \mid f(x) \geq 0\}$ et $\{x \in \mathbb{R}^p \mid f(x) = 0\}$ des parties fermées
- savoir qu'une fonction continue sur une partie fermée et bornée de \mathbb{R}^p ($p \in \{2, 3\}$) à valeurs réelle est une fonction bornée qui atteint ses bornes

II) Dérivées partielles du premier ordre et classe C^1

Les élèves doivent :

- savoir définir les dérivées partielles premières et les calculer en dérivant selon une variable en gardant les autres constantes lorsque les théorèmes usuels s'appliquent
- savoir définir une dérivée partielle ponctuellement et la calculer à l'aide d'un taux d'accroissement en des points où le calcul avec les théorèmes usuels est compliqué ou impossible
- savoir définir le vecteur gradient noté $\nabla f(x) = \overrightarrow{grad} f(x)$ (on rappelle son utilité pour déterminer la normale à une courbe plane donnée par une équation cartésienne $f(x, y) = 0$)
- savoir définir la classe C^1 pour une fonction de plusieurs variables et justifier la classe C^1 d'une application à l'aide des théorèmes usuels et des fonctions de référence
- connaître la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 pour une fonction de plusieurs variables : elle garantit que la classe C^1 entraîne la continuité pour les fonctions de plusieurs variables

La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 n'est pas au programme pour l'instant

III) Dérivées partielles du second ordre et classe C^2

Les élèves doivent :

- savoir définir les dérivées partielles secondes et les calculer en dérivant selon une variable en gardant les autres constantes lorsque les théorèmes usuels s'appliquent
- savoir justifier qu'une fonction de plusieurs variables est de classe C^2 à l'aide des théorèmes usuels
- savoir que la classe C^2 entraîne la classe C^1 pour une fonction de plusieurs variables
- connaître et utiliser le théorème de Schwarz (égalité des dérivées croisées pour une fonction de classe C^2). En particulier, utiliser ce théorème pour nier qu'une fonction est de classe C^2 au voisinage d'un point)

IV) Généralisation pour les fonctions de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n

Les notions sont généralisées aux fonctions vectorielles : la régularité de l'application se lit sur les applications coordonnées

V) Dérivées des fonctions composées

Les élèves doivent

- connaître la notion de dérivée selon un vecteur \vec{u} non nul d'une fonction $[f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}]$ en un point $a \in \mathcal{U}$
il s'agit de la limite $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t\vec{u}) - f(a)}{t} = \langle \nabla f(a), u \rangle = \langle \overrightarrow{grad} f(a), u \rangle$ lorsqu'elle existe
- savoir calculer la dérivée d'une fonction $[t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_p(t))] = f \circ \gamma(t)$ où $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_p(t))$
$$(f \circ \gamma)'(t) = \langle \overrightarrow{grad} f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \sum_{i=1}^n x'_i(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t))$$
- savoir calculer des dérivées partielles $[(u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v))]$ de fonctions composées

VI) Exemples de résolutions d'équations aux dérivées partielles

Extrait du programme : « Exemples simples de résolutions d'équations aux dérivées partielles du premiers et du second ordres »

On pourra consulter [le TD n°1](#) et [le TD n° 2](#) du chapitre 8

Un point méthode pour les EDP est au début du TD n°3 qui sera traité lundi soir.

I) Produit scalaire et norme

Les élèves doivent :

- savoir définir un produit scalaire et un espace préhilbertien/euclidien
- vérifier, dans une situation concrète, qu'une application donnée est un produit scalaire
- connaître les produits scalaires usuels de \mathbb{R}^n et $C^0([a, b], \mathbb{R})$. Les élèves ont rencontré des produits scalaires sur $\mathbb{R}_n[X]$, sur $M_n(\mathbb{R})$ (exprimé à l'aide de la trace et des coefficients) ainsi que sur les suites de carrées sommables $\ell_2(\mathbb{R})$ ou les fonctions de carrées intégrables $L_2(I, \mathbb{R})$ sur un intervalle I de \mathbb{R} .
- savoir définir la norme et la distance associées à un produit scalaire
- connaître et savoir utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité triangulaire dans un espace préhilbertien
- connaître et savoir utiliser l'identité du parallélogramme et les identités de polarisation dans un espace préhilbertien

II) Orthogonalité dans un espace euclidien

Les élèves doivent :

- savoir définir l'orthogonalité entre 2 vecteurs ou l'orthogonalité d'une famille de vecteurs dans un espace préhilbertien
 - savoir utiliser (et savoir redémontrer) qu'une famille orthogonale de vecteurs non nuls dans un espace préhilbertien est une famille libre
 - connaître et savoir utiliser le théorème de Pythagore
 - connaître la définition de deux sev orthogonaux et de l'orthogonal F^\perp d'un sev F
 - savoir que deux sev orthogonaux F et G sont en somme directe (autrement dit $F \cap G = \{0_E\}$)
 - savoir que $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$, $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$
 - savoir que $F \subset (F^\perp)^\perp$ et que F et F^\perp sont en somme directe (autrement dit $F \oplus F^\perp \subset E$)
- Attention! Si F n'est pas de dimension finie, les inclusions $F \oplus F^\perp \subset E$ et $F \subset (F^\perp)^\perp$ peuvent être strictes**
- si $\dim F < +\infty$, savoir déterminer F^\perp en utilisant une famille génératrice (e_1, \dots, e_n) de F :

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \langle x, e_i \rangle = 0\}$$

Pas d'algorithme de Gram-Schmidt cette semaine

Les élèves ne disposent pas encore du résultat : si $\dim F < +\infty$ alors $F \oplus F^\perp = E$

Pas de projection orthogonale, de distance à un sev cette semaine

• **Exercices** :

- Tous les exemples et les exercices du **chapitre VII** auront été traités.
- Tous les exemples et exercices **chapitre VIII** auront été traités.
- Tous les exemples de produit scalaires et les exemple 1 et 3 du **chapitre IX** auront été traités.

FIN