PROGRAMME DE KHÔLLE DE LA SEMAINE N°16

L'oral commencera avec une question de cours issue de la la liste des questions de cours associée à ce programme et sera évaluée sur 4 points. La réponse à cette question de cours doit être rapide et précise! (Pas plus de 20 minutes)

- *Cours* : CHAPITRE VII INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

I) Intégrales d'une fonction continue sur un intervalle

I-1) Intégrales d'une fonction continue sur un segment

Rappels de PTSI fait sur :

- Théorème sur les sommes de Riemann. Méthode des rectangles pour l'intégration numérique.
  Interprétation de l'intégrale en terme d'aire algébrique sous la courbe.
- Propriétés de l'intégrale sur un segment : linéarité, positivité , croissance, fonction C^0 positive d'intégrale nulle, relation de Chasles, inégalité triangulaire.
- Théorème d'existence des primitives : application aux calculs pratiques d'intégrales et à l'étude de fonction définie par une intégrale dépendant de ses bornes.

I-2) Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

I-3) Les exemples de référence *I-4) Généralisation aux fonctions à valeurs complexes*

Les élèves doivent :

- connaître la définition de la convergence/divergence d'une intégrale $\int_I f(t)\mathrm{d}t$ où $f : I \to \mathbb{R}$ est C^0 sur I, intervalle de $\mathbb{R}$ sous la forme : $I = [a, b]$, $[a, b[,]a, b],]a, b[, [a, +\infty[,]-\infty, b],]a, +\infty[,]-\infty, b[$ ou $\mathbb{R}$ (avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b$)
- savoir que la nature de l'intégrale ne dépend que du comportement de f au voisinage de la singularité
- connaître la définition de la convergence/divergence de $\int_I f(t)\mathrm{d}t$ où $[f : I \to \mathbb{C}]$ est C^0 sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ en revenant aux parties réelles et imaginaires.

I-5) Quelques propriétés de l'intégrales généralisées

Généralisation des propriétés de l'intégrale sous réserve d'existence : linéarité, relation de Chasles, positivité, croissance et fonction C^0 positive d'intégrale nulle.

II) Les théorèmes de convergence

II-1) Intégrale faussement généralisée : prolongement continue d'une fonction

Attention, on ne peut prolonger par continuité qu'en une singularité réelle.
Lorsque la singularité est en $\pm\infty$, il est nécessaire d'avoir $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ mais, en l'absence de résultat au programme, les étudiants doivent exploiter cette limite avec une minoration pour conclure : « si $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \ell > 0$ alors $\exists A > 0, \forall t \geqslant A, f(t) \geqslant \frac{\ell}{2}$ mais alors, par croissance : $\forall x \geqslant A,\quad \int_A^x f(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_A^x \frac{\ell}{2}\mathrm{d}t = \frac{\ell}{2}(x-A) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ donc $\int_A^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ diverge par définition »

II-2) Théorème de comparaison pour les fonctions positives

Les élèves doivent :

- savoir que, si f est positive sur $[a, b[$, sa primitive $\left[x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]$ est croissante et donc que :
$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \text{ converge} \Leftrightarrow \left[x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right] \text{ est majorée}$$
- connaître et savoir utiliser le théorème de comparaison avec des inégalités
- connaître et savoir utiliser le critère d'équivalence avec une hypothèse « de signe »
  Officiellement, dans le programme, le critère d'équivalence n'est formulé que dans le cadre de la CVA mais, dans le cas de fonction de signes constants, la CVA se confond avec la CV mais les étudiants doivent souligner l'hypothèse « signe constant » .

II-3) Intégration par parties

Les élèves doivent savoir réaliser une IPP sur une intégrale généralisée :
- elle n'est réalisable que si 2 termes sur les 3 convergent
- si la partie $[u(t)v(t)]_a^b$ est convergente, alors les intégrales pré-IPP et post-IPP ont la même nature et le calcul est possible
- si la partie$[u(t)v(t)]_a^b$ est divergente, il peut être pertinent de mener une IPP sur un segment et de passer ensuite à la limite car il peut y avoir des compensations

II-4) Changement de variables

Les élèves doivent savoir réaliser un changement de variables sur une intégrale généralisée :
- soit pour déterminer la nature d'une intégrale en étudiant la nature de l'intégrale post-changement de variables
- soit pour transformer une intégrale qu'on sait convergente (afin éventuellement d'en calculer la valeur)

III) Fonction intégrable ou intégrale absolument convergent sur un intervalle quelconque

III-1) Convergence absolue et intégrabilité

Les élèves doivent :

- définir la notion d'intégrabilité d'une fonction f sur I ou d'absolue convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} f(t)\mathrm{d}t$
- savoir que la convergence absolue/intégrabilité implique la convergence de l'intégrale mais qu'il n'y a pas de réciproque
- connaître les exemples de références avec CNS d'intégrabilité (Riemann en 0, en $+\infty$ ou en $a \in \mathbb{R}$, exponentielle en $+\infty$, logrithme en 0) ainsi que le contre-exemple d'intégrale semi-convergente $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$
- manipuler les diverses notations $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t,\ \int_{[a,b[} f(t)\mathrm{d}t,\ \int_{[a,b[} f$ généralisable à tout type d'intervalle I de $\mathbb{R}$

III-2) Les théorèmes de convergence absolue

Les élèves doivent :

- connaître l'espace $\mathrm{L}_1(\mathrm{I},\mathbb{K})$ des fonctions intégrables sur l'intervalle I et savoir que c'est un sous-espace vectoriel sur lequel l'application $\left[f \mapsto \int_{\mathrm{I}} f\right]$ est linéaire
- connaître l'inégalité triangulaire qui ne peut s'écrire que dans le cadre de l'absolue convergence
- connaître les théorèmes de comparaison (majoration, règle du o ou O, critère d'équivalence) compatibles avec l'absolue convergence.

Une méthodologie ainsi qu'une carte mentale pour les intégrales généralisées ont été dégagées.

On pourra consulter le TD n° 1 (justifier la convergence, changement de variables)
et le TD n° 2 (IPP et changement de variables) du chapitre 7

III-3) Intégrations terme à terme

Les élèves doivent :
- pourvoir énoncer le théorème d'intégration terme à terme tel que donné par le programme (voir cours)
- savoir mettre en application le théorème en mettant bien en avant la justification de chacune des hypothèses
- savoir qu'en l'absence d'une des hypothèses et même si les deux termes existent, il peut ne pas y avoir égalité entre l'intégrale d'un somme de série et la somme de la série intégrée terme à terme.

On pourra consulter le TD n° 3 (théorème d'intégration terme à terme) du chapitre 7

- ***Exercices*** : Tous les exemples et les exercices du chapitre VII auront été traités.

L'exercice n°6 sera traité en DM pour le 26/01 (DM n°4)

FIN