PROGRAMME DE KHÔLLE DE LA SEMAINE N°15

L'oral commencera avec une question de cours issue de la la liste des questions de cours et sera évaluée sur 4 points. La réponse à cette question de cours doit être rapide et précise ! (Pas plus de 20 minutes)
Attention ! Ne pas interroger sur les résultats IPP, Changement de variables et intégration terme à terme cette semaine
A la place, on pourra interroger sur la partie n°2 (géométrie complexe) des question de cours des semaines 13 et 14

- **Cours** : CHAPITRE VI RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES ET DES MATRICES

Révision du programme précédent avec, en plus :

IV) Endomorphisme et matrice trigonalisable

Les élèves doivent :
- savoir qu'un endomorphisme est trigonalisable s'il existe une base dans laquelle la matrice de l'endomorphisme est triangulaire supérieure
- savoir qu'une matrice est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure
- savoir qu'un endomorphisme est trigonalisable si n'importe laquelle de ses matrices l'est et qu'une matrice est trigonalisable si son endomorphisme canoniquement associé l'est aussi.
- connaître la condition nécessaire et suffisante assurant la trigonalisation à savoir que le polynôme caractéristique est scindé
- savoir qu'une matrice est toujours trigonalisable sur $M_n(\mathbb{C})$
- savoir que la trace est la somme des valeurs propres complexes et que le déterminant est la produit des valeurs propres complexes et savoir exploiter ces résultats pour déterminer un polynôme caractéristique dans certains cas en évitant des calculs fastidieux.
- être capable de réduire (diagonaliser/trigonaliser) une matrice carrée d'ordre 2 (Pas d'indication nécessaire)
- être capable de réduire (diagonaliser/trigonaliser) une matrice d'ordre 3 mais avec des indications sur la forme de la matrice réduite dans le cas trigonalisable

V) Application

Les élèves doivent :
- savoir que deux matrices semblables ont le même polynômes caractéristiques, les mêmes valeurs propres et des sev propres de même dimension de sorte que leurs réductions conduit à la même réduite.
- être capable de dire si deux matrices carrées sont semblables ou pas
- être capable de calculer les puissances itérées d'une matrices carrées en s'aidant d'une réduction et d'autres méthodes vues en première année
  Des révisions ont été faites sur l'ensemble des méthodes du programme de PTSI-PT pour calculer des puissances itérées.
- être capable de déterminer les suites satisfaisants à des relations de récurrence linéaires d'ordre 1 en introduisant un schéma matriciel $X_{n+1} = AX_n$

D'autres applications de la réduction ont été rencontrées en exercice (résolution de système différentiel, recherche de commutant ou de racine carré) mais les exercices devront comporter des indications car les méthodes ne sont pas à connaître.

On pourra consulter le TD n° 3, le TD n° 4,le TD n° 5 et le TD n° 6 du chapitre 6

I) *Intégrales d'une fonction continue sur un intervalle*

I-1) *Intégrales d'une fonction continue sur un segment*

Rappels de PTSI fait sur :

- Théorème sur les sommes de Riemann. Méthode des rectangles pour l'intégration numérique.
  Interprétation de l'intégrale en terme d'aire algébrique sous la courbe.
- Propriétés de l'intégrale sur un segment : linéarité, positivité , croissance, fonction C^0 positive d'intégrale nulle, relation de Chasles, inégalité triangulaire.
- Théorème d'existence des primitives : application aux calculs pratiques d'intégrales et à l'étude de fonction définie par une intégrale dépendant de ses bornes.

I-2) *Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque*

I-3) *Les exemples de référence* I-4) *Généralisation aux fonctions à valeurs complexes*

Les élèves doivent :

- connaître la définition de la convergence/divergence d'une intégrale $\int_I f(t)\mathrm{d}t$ où $f : I \to \mathbb{R}$ est C^0 sur I, intervalle de $\mathbb{R}$ sous la forme : $I = [a,b]$, $[a,b[,]a,b],]a,b[, [a,+\infty[,]-\infty,b],]a,+\infty[,]-\infty,b[$ ou $\mathbb{R}$ (avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b$)
- savoir que la nature de l'intégrale ne dépend que du comportement de f au voisinage de la singularité
- connaître la définition de la convergence/divergence de $\int_I f(t)\mathrm{d}t$ où $[f : I \to \mathbb{C}]$ est C^0 sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ en revenant aux parties réelles et imaginaires.

I-5) *Quelques propriétés de l'intégrales généralisées*

Généralisation des propriétés de l'intégrale sous réserve d'existence : linéarité, relation de Chasles, positivité, croissance et fonction C^0 positive d'intégrale nulle.

II) *Les théorèmes de convergence*

II-1) *Intégrale faussement généralisée : prolongement continue d'une fonction*

Attention, on ne peut prolonger par continuité qu'en une singularité réelle.
Lorsque la singularité est en $\pm\infty$, il est nécessaire d'avoir $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ mais, en l'absence de résultat au programme, les étudiants doivent exploiter cette limite avec une minoration pour conclure : « si $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \ell > 0$ alors $\exists A > 0, \forall t \geqslant A, f(t) \geqslant \frac{\ell}{2}$ mais alors, par croissance : $\forall x \geqslant A, \quad \int_A^x f(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_A^x \frac{\ell}{2}\mathrm{d}t = \frac{\ell}{2}(x-A) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ donc $\int_A^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ diverge par définition »

II-2) *Théorème de comparaison pour les fonctions positives*

Les élèves doivent :

- savoir que, si f est positive sur $[a,b[$, sa primitive $\left[x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]$ est croissante et donc que :
  $$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \text{ converge} \Leftrightarrow \left[x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right] \text{ est majorée}$$
- connaître et savoir utiliser le théorème de comparaison avec des inégalités
- connaître et savoir utiliser le critère d'équivalence avec une hypothèse « de signe »
  Officiellement, dans le programme, le critère d'équivalence n'est formulé que dans le cadre de la CVA mais, dans le cas de fonction de signes constants, la CVA se confond avec la CV.

Attention ! L'IPP et le changement de variables n'ont été vues que dans le cadre de l'intégration sur un segment

Pas d'IPP ni de changement de variables sur une intégrale généralisée cette semaine

III) Fonction intégrable ou intégrale absolument convergent sur un intervalle quelconque

III-1) Convergence absolue et intégrabilité

Les élèves doivent :

- définir la notion d'intégrabilité d'une fonction f sur I ou d'absolue convergence de l'intégrale $\int_{\mathrm{I}} f(t)\mathrm{d}t$
- savoir que la convergence absolue/intégrabilité implique la convergence de l'intégrale mais qu'il n'y a pas de réciproque
- connaître les exemples de références avec CNS d'intégrabilité (Riemann en 0, en $+\infty$ ou en $a \in \mathbb{R}$, exponentielle en $+\infty$, logrithme en 0)

  le contre-exemple d'intégrale semi-convergente $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ a été admis cette semaine
- manipuler les diverses notations $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_{[a,b[} f(t)\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_{[a,b[} f$ généralisable à tout type d'intervalle I de $\mathbb{R}$

III-2) Les théorèmes de convergence absolue

Les élèves doivent :

- connaître l'espace $\mathrm{L}_1(\mathrm{I},\mathbb{K})$ des fonctions intégrables sur l'intervalle I et savoir que c'est un sous-espace vectoriel sur lequel l'application $\left[f \mapsto \int_{\mathrm{I}} f\right]$ est linéaire
- connaître l'inégalité triangulaire qui ne peut s'écrire que dans le cadre de l'absolue convergence
- connaître les théorèmes de comparaison (majoration, règle du o ou O, critère d'équivalence) compatibles avec l'absolue convergence.

Une méthodologie pour les intégrales généralisées a été dégagée.

Pas de théorème d'intégration terme à terme cette semaine

- *Exercices* :

- Tous les exemples et exercices du chapitre VI auront été traités.
- Les exemples 0.5 et de 1 à 4 ainsi que l'exemple 7 et l'exercice n°1 (de I_1 à I_5) et l'exercice n° 3 du chapitre VII auront été traités.

FIN