PROGRAMME DE KHÔLLE DE LA SEMAINE N°14

L'oral commencera avec une question de cours issue de la la liste des questions de cours associée à ce programme et sera évaluée sur 4 points. La réponse à cette question de cours doit être rapide et précise! (Pas plus de 20 minutes)

• *Cours* :

CHAPITRE VI RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES ET DES MATRICES

I) *Eléments propres d'un endomorphisme*

Les élèves doivent :

— savoir définir les notions de valeurs propres, vecteurs propres, sev propres et spectre pour un endomorphisme

— savoir que les vecteurs propres sont les vecteurs x non nul tels que $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par f et que les valeurs propres sont les scalaires tels que $E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda id)$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$

— savoir que des sev propres associés à des valeurs propres distinctes sont toujours en somme directe et donc qu'une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est toujours libre

II) *Eléments propres en dimension finie et polynôme caractéristique*

Les élèves doivent :

— savoir qu'en dimension finie il y a au plus n valeurs propres distinctes pour un endomorphisme et que, si λ est une valeur propre, la dimension de l'espace propre $E_\lambda(f)$ vérifie :$1 \leqslant \dim E_\lambda(f) \leqslant n$

— savoir définir les notions de valeurs propres, vecteurs propres, sev propres et spectre pour une matrice carrée

— savoir définir et calculer (astucieusement si possible) le polynôme caractéristique d'une matrice ou d'un endomorphisme (en dimension finie) (Notation $\chi_M(x) = \det(xI_n - M)$)

— savoir que, dans ce cadre, les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique

— savoir que le polynôme caractéristique $\chi_M(x)$ d'une matrice carrée de taille n est unitaire, de degré n avec pour coefficient constant $(-1)^n \det M$

— savoir définir la multiplicité d'une valeur propre

— savoir que, pour une valeur propre, la dimension de l'espace propre est comprise entre 1 et sa multiplicité.
En particulier, les espaces propres associés à des valeur propre simple sont de dimension 1.

III) *Endomorphismes et matrices diagonalisables*

III-1) *Définition et premiers exemples*

Les élèves doivent :

— pouvoir définir la notion d'endomorphisme diagonalisable comme admettant une base de vecteurs propres

— pouvoir définir la notion de matrice diagonalisable comme étant semblable à une matrice diagonale

— savoir que les projecteurs et les symétries vectorielles sont diagonalisables, connaître le spectre et le polynôme caractéristique d'un projecteur ou d'une symétrie et donc connaître le rang, la trace et le déterminant.

— savoir qu'un endomorphisme ou une matrice n'est pas toujours diagonalisable et qu'une matrice réelle peut être diagonalisable sur $M_n(\mathbb{C})$ sans l'être sur $M_n(\mathbb{R})$

III-2) *Conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisation*

Les élèves doivent :

— savoir qu'un endomorphisme sur E (resp. une matrice de $M_n(\mathbb{K})$) est diagonalisable si et seulement si la somme (directe) de ses sev propres vaut E (resp $\mathbb{K}^n$) ce qui revient à vérifier que la somme des dimension des sev propres vaut $\dim E$

— savoir qu'un endomorphisme sur E (resp. une matrice) est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et que la dimension de chaque sev propre est égale à la multiplicité

— savoir qu'un endomorphisme sur E de dimension n (resp. une matrice de $M_n(\mathbb{K})$) qui possède n valeurs propres simples est diagonalisable

— savoir concrètement diagonaliser un endomorphisme (resp. une matrice) en petite dimension

On pourra consulter le TD n° 1 et le TD n° 2 du chapitre 6

IV) *Endomorphisme et matrice trigonalisable*

Les élèves doivent :

— savoir qu'un endomorphisme est trigonalisable s'il existe une base dans laquelle la matrice de l'endomorphisme est triangulaire supérieure

— savoir qu'une matrice est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure

— savoir qu'un endomorphisme est trigonalisable si n'importe laquelle de ses matrices l'est et qu'une matrice est trigonalisable si son endomorphisme canoniquement associé l'est aussi.

— connaître la condition nécessaire et suffisante assurant la trigonalisation à savoir que le polynôme caractéristique est scindé

— savoir qu'une matrice est toujours trigonalisable sur $M_n(\mathbb{C})$

— savoir que la trace est la somme des valeurs propres complexes et que le déterminant est la produit des valeurs propres complexes et savoir exploiter ces résultats pour déterminer un polynôme caractéristique dans certains cas en évitant des calculs fastidieux.

— être capable de réduire (diagonaliser/trigonaliser) une matrice carrée d'ordre 2 (Pas d'indication nécessaire)

— être capable de réduire (diagonaliser/trigonaliser) une matrice d'ordre 3 mais avec des indications sur la forme de la matrice réduite dans le cas trigonalisable

On pourra consulter les corrections détaillées des exemples 4 et 5 sur le chapitre 6

V) *Application*

Les élèves doivent :

— savoir que deux matrices semblables ont le même polynômes caractéristiques, les mêmes valeurs propres et des sev propres de même dimension de sorte que leurs réductions conduit à la même réduite.

— être capable de dire si deux matrices carrées sont semblables ou pas

On pourra consulter le TD n° 3 sur le chapitre 6

— être capable de calculer les puissances itérées d'une matrices carrées en s'aidant d'une réduction et d'autres méthodes vues en première année

Des révisions ont été faites sur l'ensemble des méthodes du programme de PTSI-PT pour calculer des puissances itérées.

— être capable de déterminer les suites satisfaisants à des relations de récurrence linéaires d'ordre 1 en introduisant un schéma matriciel $X_{n+1} = AX_n$

D'autres applications de la réduction ont été rencontrées en exercice (résolution de système différentiel, recherche de commutant ou de racine carré) mais les exercices devront comporter des indications car les méthodes ne sont pas à connaître.

Le Td n°4 (exercice 5 et 6) sera traité lundi soir et le Td n°5 (fin des exercices 7 et 8) sera traité mardi après-midi

• ***Exercices*** :

- Tous les exemples et exercices du chapitre VI auront été traités.

FIN