PROGRAMME DE KHÔLLE DE LA SEMAINE N°13

L'oral commencera avec une question de cours issue de la la liste des questions de cours associée à ce programme et sera évaluée sur 4 points. La réponse à cette question de cours doit être rapide et précise! (Pas plus de 20 minutes)

- **Cours** :

CHAPITRE IV — COMPLÉMENTS SUR LES COURBES PLANES

IV) *Propriétés métriques d'une courbe plane*

IV-1) *Longueur d'une courbe plane* et *III-2) Repère de Frenet, courbure d'une courbe*

Les élèves doivent :

- définir et calculer la longueur d'une courbe (en utilisant éventuellement la géométrie de la courbe pour réduire le domaine d'intégration)
- définir la notion d'abscisse curviligne et l'utiliser pour paramétrer la courbe par l'abscisse curviligne
- définir et calculer le repère de Frenet en un point régulier d'une courbe
- définir et calculer la courbure γ d'une courbe

  soit par relèvement de $\overrightarrow{T}$: $\gamma = \dfrac{d\alpha}{ds} = \dfrac{\alpha'(t)}{s'(t)}$ si $\overrightarrow{T} = \cos\alpha(t)\,\overrightarrow{i} + \sin\alpha(t)\,\overrightarrow{j}$

  soit à l'aide des formules de Frenet : $\dfrac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \gamma\overrightarrow{N} \Leftrightarrow \dfrac{1}{s'(t)}\dfrac{d\overrightarrow{T}}{dt} = \gamma\overrightarrow{N}$

V) *Développée d'une courbe régulière*

Les élèves doivent :

- définir et déterminer le centre, le rayon et le cercle de courbure d'une courbe en un point birégulier
- définir et déterminer la développée d'une courbe régulière

  soit en utilisant que c'est le lieu des centres de courbures

  soit en utilisant que c'est l'enveloppe des normales de la courbe

On pourra consulter l'étude de la cycloïde et l'étude de l'astroïde

On pourra consulter le TD n° 2 et le TD n° 3 du chapitre 4

CHAPITRE VI — RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES ET DES MATRICES

I) *Eléments propres d'un endomorphisme*

Les élèves doivent :

- savoir définir les notions de valeurs propres, vecteurs propres, sev propres et spectre pour un endomorphisme
- savoir que les vecteurs propres sont les vecteurs x non nul tels que Vect(x) est stable par f et que les valeurs propres sont les scalaires tels que $E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda id)$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$
- savoir que des sev propres associés à des valeurs propres distinctes sont toujours en somme directe et donc qu'une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est toujours libre

II) *Eléments propres en dimension finie et polynôme caractéristique*

Les élèves doivent :

- savoir qu'en dimension finie il y a au plus n valeurs propres distinctes pour un endomorphisme et que, si λ est une valeur propre, la dimension de l'espace propre $E_\lambda(f)$ vérifie :$1 \leqslant \dim E_\lambda(f) \leqslant n$
- savoir définir les notions de valeurs propres, vecteurs propres, sev propres et spectre pour une matrice carrée
- savoir définir et calculer (astucieusement si possible) le polynôme caractéristique d'une matrice ou d'un endomorphisme (en dimension finie) (Notation $\chi_M(x) = \det(xI_n - M)$)
- savoir que, dans ce cadre, les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique
- savoir que le polynôme caractéristique $\chi_M(x)$ d'une matrice carrée de taille n est unitaire, de degré n avec pour coefficient constant $(-1)^n \det M$

— savoir définir la multiplicité d'une valeur propre
— savoir que, pour une valeur propre, la dimension de l'espace propre est comprise entre 1 et sa multiplicité. En particulier, les espaces propres associés à des valeur propre simple sont de dimension 1.

III) Endomorphismes et matrices diagonalisables

III-1) Définition et premiers exemples

Les élèves doivent :

— pouvoir définir la notion d'endomorphisme diagonalisable comme admettant une base de vecteurs propres
— pouvoir définir la notion de matrice diagonalisable comme étant semblable à une matrice diagonale
— savoir que les projecteurs et les symétries vectorielles sont diagonalisables, connaître le spectre et le polynôme caractéristique d'un projecteur ou d'une symétrie et donc connaître le rang, la trace et le déterminant.
— savoir qu'un endomorphisme ou une matrice n'est pas toujours diagonalisable et qu'une matrice réelle peut être diagonalisable sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ sans l'être sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$

III-2) Conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisation

Les élèves doivent :

— savoir qu'un endomorphisme sur E (resp. une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$) est diagonalisable si et seulement si la somme (directe) de ses sev propres vaut E (resp $\mathbb{K}^n$) ce qui revient à vérifier que la somme des dimension des sev propres vaut $\dim \mathrm{E}$
— savoir qu'un endomorphisme sur E (resp. une matrice) est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et que la dimension de chaque sev propre est égale à la multiplicité
— savoir qu'un endomorphisme sur E de dimension n (resp. une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$) qui possède n valeurs propres simples est diagonalisable
— savoir concrètement diagonaliser un endomorphisme (resp. une matrice) en petite dimension

IV) Endomorphisme et matrice trigonalisable

Les élèves doivent :

— savoir qu'un endomorphisme est trigonalisable s'il existe une base dans laquelle la matrice de l'endomorphisme est triangulaire supérieure
— savoir qu'une matrice est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure
— savoir qu'un endomorphisme est trigonalisable si n'importe laquelle de ses matrices l'est et qu'une matrice est trigonalisable si son endomorphisme canoniquement associé l'est aussi.
— connaître la condition nécessaire et suffisante assurant la trigonalisation à savoir que le polynôme caractéristique est scindé
— savoir qu'une matrice est toujours trigonalisable sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$
— <u>savoir que la trace est la somme des valeurs propres complexes et que le déterminant est la produit des valeurs propres complexes et savoir exploiter ces résultats pour déterminer un polynôme caractéristique dans certains cas en évitant des calculs fastidieux.</u>

Attention ! Aucune trigonalisation en pratique n'aura encore été faite avec les étudiants
Les élèves doivent essentiellement pouvoir utiliser le résultat souligné cette semaine.

On pourra consulter le TD n° 1 du chapitre 6
Le TD n° 2 (exercices 2, 3 et 4) du chapitre 6 sera traité mardi 10 à 14h

• ***Exercices*** :

- Tous les exemples et exercices du chapitre IV auront été traités.
- Les exemples 1, 3/2, 2 et 3 et les exercices 1 à 4 du chapitre VI auront été traités.

FIN