PROGRAMME DE KHÔLLE DE LA SEMAINE N°12

L'oral commencera avec une question de cours issue de la la liste des questions de cours associée à ce programme et sera évaluée sur 4 points. La réponse à cette question de cours doit être rapide et précise ! (Pas plus de 20 minutes)

- **Cours** :

CHAPITRE IV COMPLÉMENTS SUR LES COURBES PLANES

I) Représentation des courbes planes usuelles

Les élèves doivent :

- différentier représentation cartésienne et représentation paramétrique d'une courbe plane
- identifier à partir d'une représentation cartésienne ou paramétrique les droites ou les cercles dans le plan

Révisions sur la géométrie plane de PTSI (exemple et exercice 1) avec la fiche méthodologique bilan où les élèves doivent :

- identifier les droites et les cercles du plan avec leurs éléments caractéristiques ;
- savoir introduire et utiliser les outils calculatoires que sont le déterminant et le produit scalaire ;
- pouvoir déterminer une projection orthogonale sur une droite et l'utiliser pour calculer la distance d'un point à une droite ;
- savoir étudier la position relative d'une droite et d'un cercle ou la position relative de deux cercles
- savoir déterminer les tangentes à un point extérieur à un cercle donné.

II) Les coniques

II-1) Définition par foyer, directrice et excentricité et II-2) Equations réduites des coniques propres

Les élèves doivent pourvoir

- déterminer une équation cartésienne d'une conique donnée par un couple foyer/directrice et une excentricité en posant judicieusement un repère adapté au problème
- pourvoir obtenir une équation réduite de la conique à partir d'une équation cartésienne afin de pouvoir l'identifier (avec 3 cas selon la valeur de l'excentricité)
  Pour le moment, on ne proposera aux étudiants que des coniques avec une équation cartésienne sans termes croisés
- faire une représentation de la conique en identifiant ses éléments caractéristiques sur une équation réduite
  Les éléments caractéristiques à savoir identifier à partir d'une équation réduite sont
  - le centre pour une ellipse/hyperbole ou le sommet pour une parabole
  - les axes de symétries et, en particulier, l'axe focal (qui portent les foyers)
  - les demi-axes a et b permettant de positionner les sommets (les tangentes y sont perpendiculaires aux axes)
  - les asymptotes dans le cas d'une hyperbole
  Les élèves n'ont pas à savoir retrouver les foyers, les directrices et l'excentricité à partir d'une équation.
- savoir préciser un paramétrage d'une conique et, réciproquement, savoir identifier une conique comme une courbe usuelle lorsqu'elle est donnée par un paramétrage classique

III) Tangente à une courbe plane, enveloppe d'une famille de droites

III-1) Tangente à une courbe donnée par une représentation paramétrique et III-2) Tangente à une courbe donnée par une équation cartésienne

Les élèves doivent :

- pouvoir déterminer la tangente à une courbe en un point de la courbe que celle-ci soit donnée en représentation paramétrique ou cartésienne
- connaître et calculer le vecteur gradient en un point d'une courbe donnée en représentation cartésienne et savoir que $\vec{\nabla} f = \overrightarrow{grad} f$, s'il est non nul, est un vecteur normal pour la tangente à la courbe.
- connaître la notion de lignes de niveaux et la direction et l'orientation du champs de gradients associés

III-2) Enveloppe d'une famille de droites

Les élèves doivent :

- définir la notion d'enveloppe d'une famille de droites
- connaître la méthode pratique de détermination d'une enveloppe (raisonnement géométrique à refaire au cas par cas)

On pourra consulter le TD n° 1 et le TD n° 2 du chapitre 4

IV) *Propriétés métriques d'une courbe plane*

IV-1) *Longueur d'une courbe plane* et *III-2) Repère de Frenet, courbure d'une courbe*

Les élèves doivent :

- définir et calculer la longueur d'une courbe (en utilisant éventuellement la géométrie de la courbe pour réduire le domaine d'intégration)
- définir la notion d'abscisse curviligne et l'utiliser pour paramétrer la courbe par l'abscisse curviligne
- définir et calculer le repère de Frenet en un point régulier d'une courbe
- définir et calculer la courbure γ d'une courbe

  soit par relèvement de $\overrightarrow{T}$: $\gamma = \dfrac{d\alpha}{ds} = \dfrac{\alpha'(t)}{s'(t)}$ si $\overrightarrow{T} = \cos\alpha(t)\overrightarrow{i} + \sin\alpha(t)\overrightarrow{j}$

  soit à l'aide des formules de Frenet : $\dfrac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \gamma\overrightarrow{N} \Leftrightarrow \dfrac{1}{s'(t)}\dfrac{d\overrightarrow{T}}{dt} = \gamma\overrightarrow{N}$

V) *Développée d'une courbe régulière*

Les élèves doivent :

- définir et déterminer le centre, le rayon et le cercle de courbure d'une courbe en un point birégulier
- définir et déterminer la développée d'une courbe régulière

  soit en utilisant que c'est le lieu des centres de courbures

  soit en utilisant que c'est l'enveloppe des normales de la courbe

On pourra consulter le TD n° 3 sur le chapitre IV (courbure et developpée d'une courbe)

CHAPITRE VI RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES ET DES MATRICES

I) *Eléments propres d'un endomorphisme*

Les élèves doivent :

- savoir définir les notions de valeurs propres, vecteurs propres, sev propres et spectre pour un endomorphisme
- savoir que les vecteurs propres sont les vecteurs x non nul tels que $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par f et que les valeurs propres sont les scalaires tels que $E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda id)$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$
- savoir que des sev propres associés à des valeurs propres distinctes sont toujours en somme directe et donc qu'une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est toujours libre

II) *Eléments propres en dimension finie et polynôme caractéristique*

Les élèves doivent :

- savoir qu'en dimension finie il y a au plus n valeurs propres distinctes pour un endomorphisme et que, si λ est une valeur propre, la dimension de l'espace propre $E_\lambda(f)$ vérifie :$1 \leqslant \dim E_\lambda(f) \leqslant n$
- savoir définir les notions de valeurs propres, vecteurs propres, sev propres et spectre pour une matrice carrée
- savoir définir et calculer (astucieusement si possible) le polynôme caractéristique d'une matrice ou d'un endomorphisme (en dimension finie) (Notation $\chi_M(x) = \det(xI_n - M)$)
- savoir que, dans ce cadre, les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique
- savoir que le polynôme caractéristique $\chi_M(x)$ d'une matrice carrée de taille n est unitaire, de degré n avec pour coefficient constant $(-1)^n \det M$
- savoir définir la multiplicité d'une valeur propre
- savoir que, pour une valeur propre, la dimension de l'espace propre est comprise entre 1 et sa multiplicité.

  En particulier, les espaces propres associés à des valeur propre simple sont de dimension 1.

Pas de diagonalisation ni trigonalisation cette semaine : uniquement recherche des éléments propres (dimension finie ou non)

- ***Exercices*** :

- Tous les exemples et exercices du chapitre IV auront été traités.
- Exemple 1 (avec sa suite) et 3/2 et des éléments propres avec polynôme caractéristique pour le chapitre VI

FIN