

L'oral commencera avec une question de cours issue de la la liste des **questions de cours** associée à ce programme et sera évaluée sur 4 points. La réponse à cette question de cours doit être rapide et précise! (Pas plus de 20 minutes)

• **Cours** :

CHAPITRE III COMPLÉMENTS SUR LES SÉRIES NUMÉRIQUES

La totalité du chapitre en insistant sur :

II) Résultats sur les séries absolument convergente

II-1) Les théorèmes de convergence absolue

Les élèves disposent

- d'un résultat de comparaison et d'un critère d'équivalence pour la convergence absolue
- de la règle du « grand O » ou du « petit o » à utiliser en particulier pour mener une comparaison avec une série de Riemann ou une série géométrique
- de la règle de d'Alembert.

A cette occasion, $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ a été définie pour tout $z \in \mathbb{C}$. Le lien avec la définition de PTSI $e^z = e^{\Re(z)} e^{i\Im(z)}$ est admis.

- du résultat sur le produit de Cauchy de deux séries numériques absolument convergentes

Cela permet de justifier que : $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad e^{z+z'} = e^z e^{z'}$

III) Compléments sur les séries à termes réels

III-1) Technique de comparaison série-intégrale

Les élèves doivent :

- savoir mettre une technique de comparaison série-intégrale pour étudier la convergence d'une série numérique ou pour estimer ses sommes partielles
- utiliser cette technique pour démontrer le critère de Riemann : $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$

Les séries de Riemann, lorsqu'elles convergent, sont absolument convergentes

Une fiche méthodologique sur la comparaison série/intégrale a été distribuée et commentée.

III-2) Le théorème des séries alternées

Les élèves doivent

- savoir énoncer le résultat et connaître le résultat d'encadrement des sommes partielles et la majoration du reste associé
- connaître l'exemple classique des séries de Riemann alternée $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ qui converge pour $\alpha > 0$ (avec CVA si $\alpha > 1$)
- pouvoir refaire tout ou partie de la démonstration du théorème des séries alternées à la demande
- savoir que
 - l'hypothèse « le terme général tend vers 0 en décroissant » est essentielle dans le théorème des séries alternées
 - $u_n \sim v_n$ et (v_n) décroît n'entraîne pas que (u_n) décroît
 - l'hypothèse de signe ou la CVA est essentielle pour l'utilisation du critère d'équivalence

On pourra consulter **le TD n°3** sur ce chapitre.

Suite du programme page suivante

La totalité du chapitre en insistant sur :

II) Équations différentielles linéaires d'ordre 2

Les élèves doivent :

- identifier une équation différentielle linéaire d'ordre 2 (EDL₂), identifier la variable, les coefficients et le second membre et identifier si elle est résolue en y''
- connaître la structure algébrique de l'ensemble des solutions

$\mathcal{S} = y_p + \text{Vect}(h_1, h_2)$ où $\begin{cases} y_p \text{ est une solution particulière} \\ h_1 \text{ et } h_2 \text{ sont des solutions homogènes non colinéaires} \end{cases}$ lorsque l'équation est résolue en y''

- connaître la notion de problème de Cauchy et l'unicité de la solution associée
- identifier une EDL₂ à coefficients constants et déterminer l'ensemble des solutions homogènes à l'aide d'une équation caractéristique
- connaître, dans le cas d'une EDL₂ à coefficients constants, la règle pour la recherche d'une solution particulière analogue à un second membre du type Ke^{mx} avec K et m des scalaires (éventuellement $K\cos(\omega x)$ ou $K\sin(\omega x)$ en utilisant la partie réelle/imaginaire de $Ke^{i\omega}$)
- rechercher des solutions (homogènes ou particulières) sous une forme donnée (polynômiale, du type t^α , $e^{\alpha x}$, etc...)

Attention, pas de recherche de solution développable en série entière pour l'instant!

- pouvoir utiliser la méthode de Lagrange (dite d'abaissement de l'ordre) permettant de trouver toutes les solutions sous la forme $y = z \times h$ à l'aide d'une seule solution homogène h ne s'annulant pas
- pouvoir utiliser un changement de variables (qui sera toujours suggéré par le sujet) pour résoudre une EDL₂ à coefficients non constants en le ramenant à une résolution d'une EDL₂ à coefficients constants.
- pouvoir mener un recollement de solutions à l'aide d'un raisonnement par analyse/synthèse en exploitant, par exemple, les développements limités pour caractériser la dérivabilité ponctuelle de y puis de y' traduisant la dérivabilité seconde de y .

On pourra consulter [la carte mentale pour la résolution d'une EDL2](#)

On pourra consulter [la fiche bilan pour le changement de variables dans une EDL2](#)

On pourra consulter [le TD n° 1](#) et [le TD n° 2](#) du chapitre 5

Suite du programme page suivante

I) Représentation des courbes planes usuelles

Les élèves doivent :

- différencier représentation cartésienne et représentation paramétrique d'une courbe plane
 - identifier à partir d'une représentation cartésienne ou paramétrique les droites ou les cercles dans le plan
- Révisions sur la géométrie plane de PTSI (exemple et exercice 1) avec la **fiche méthodologique bilan** où les élèves doivent :
- identifier les droites et les cercles du plan avec leurs éléments caractéristiques;
 - savoir introduire et utiliser les outils calculatoires que sont le déterminant et le produit scalaire;
 - pouvoir déterminer une projection orthogonale sur une droite et l'utiliser pour calculer la distance d'un point à une droite;
 - savoir étudier la position relative d'une droite et d'un cercle ou la position relative de deux cercles
 - savoir déterminer les tangentes à un point extérieur à un cercle donné.

II) Les coniques

II-1) Définition par foyer, directrice et excentricité et II-2) Equations réduites des coniques propres

Les élèves doivent pourvoir

- déterminer une équation cartésienne d'une conique donnée par un couple foyer/directrice et une excentricité en posant judicieusement un repère adapté au problème
- pourvoir obtenir une équation réduite de la conique à partir d'une équation cartésienne afin de pouvoir l'identifier (avec 3 cas selon la valeur de l'excentricité)
Pour le moment, on ne proposera aux étudiants que des coniques avec une équation cartésienne sans termes croisés
- faire une représentation de la conique en identifiant ses éléments caractéristiques sur une équation réduite
 Les éléments caractéristiques à savoir identifier à partir d'une équation réduite sont
 - le centre pour une ellipse/hyperbole ou le sommet pour une parabole
 - les axes de symétries et, en particulier, l'axe focal (qui portent les foyers)
 - les demi-axes a et b permettant de positionner les sommets (les tangentes y sont perpendiculaires aux axes)
 - les asymptotes dans le cas d'une hyperbole**Les élèves n'ont pas à savoir retrouver les foyers, les directrices et l'excentricité à partir d'une équation.**
- savoir préciser un paramétrage d'une conique et, réciproquement, savoir identifier une conique comme une courbe usuelle lorsqu'elle est donnée par un paramétrage classique

III) Tangente à une courbe plane, enveloppe d'une famille de droites

III-1) Tangente à une courbe donnée par une représentation paramétrique et III-2) Tangente à une courbe donnée par une équation cartésienne

Les élèves doivent :

- pouvoir déterminer la tangente à une courbe en un point de la courbe que celle-ci soit donnée en représentation paramétrique ou cartésienne
- connaître et calculer le vecteur gradient en un point d'une courbe donnée en représentation cartésienne et savoir que $\vec{\nabla} f = \overrightarrow{grad} f$, s'il est non nul, est un vecteur normal pour la tangente à la courbe.
- connaître la notion de lignes de niveaux et la direction et l'orientation du champs de gradients associés

III-2) Enveloppe d'une famille de droites

Les élèves doivent :

- définir la notion d'enveloppe d'une famille de droites
- connaître la méthode pratique de détermination d'une enveloppe (raisonnement géométrique à refaire au cas par cas)
 On pourra consulter le TD n° 1 et le TD n° 2 du chapitre 4

Exercices :

- Tous les exemples et exercices du **chapitre III** auront été traités.
- Tous les exemples et exercices du **chapitre V** auront été traités.
- Les exemples 1 à 4 et les exercices 1 à 3 du **chapitre IV** auront été traités.

FIN