Programme de khôlle de la semaine n°11

L'oral commencera avec une question de cours issue de la la liste des questions de cours associée à ce programme et sera évaluée sur 4 points. La réponse à cette question de cours doit être rapide et précise! (Pas plus de 20 minutes)

- **Cours** :

Chapitre III Compléments sur les séries numériques

La totalité du chapitre en insistant sur :

II) Résultats sur les séries absolument convergente

II-1) Les théorèmes de convergence absolue

Les élèves disposent
- d'un résultat de comparaison et d'un critère d'équivalence pour la convergence absolue
- de la règle du « grand O »ou du « petit o »à utiliser en particulier pour mener une comparaison avec une série de Riemann ou une série géométrique
- de la règle de d'Alembert.
  A cette occasion, $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ a été définie pour tout $z \in \mathbb{C}$. Le lien avec la définition de PTSI $e^z = e^{\Re e(z)} e^{i\Im m(z)}$ est admis.
- du résultat sur le produit de Cauchy de deux séries numériques absolument convergentes
  Cela permet de justifier que : $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad e^{z+z'} = e^z e^{z'}$

III) Compléments sur les séries à termes réels

III-1) Technique de comparaison série-intégrale

Les élèves doivent :
- savoir mettre une technique de comparaison série-intégrale pour étudier la convergence d'une série numérique ou pour estimer ses sommes partielles
- utiliser cette technique pour démontrer le critère de Riemann : $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$

Les séries de Riemann, lorsqu'elles convergent, sont absolument convergentes

Une fiche méthodologique sur la comparaison série/intégrale a été distribuée et commentée.

III-2) Le théorème des séries alternées

Les élèves doivent
- savoir énoncer le résultat et connaître le résultat d'encadrement des sommes partielles et la majoration du reste associé
- connaître l'exemple classique des séries de Riemann alternée $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ qui converge pour $\alpha > 0$ (avec CVA si $\alpha > 1$)
- pouvoir refaire tout ou partie de la démonstration du théorème des séries alternées à la demande
- savoir que
  - l'hypothèse « le terme général tend vers 0 en décroissant » est essentielle dans le théorème des séries alternées
  - $u_n \sim v_n$ et (v_n) décroît n'entraîne pas que (u_n) décroît
  - l'hypothèse de signe ou la CVA est essentielle pour l'utilisation du critère d'équivalence

Suite du programme page suivante

La totalité du chapitre en insistant sur :

II) *Équations différentielles linéaires d'ordre 2*

Les élèves doivent :

— identifier une équation différentielle linéaire d'ordre 2 (EDL_2), identifier la variable, les coefficients et le second membre et identifier si elle est résolue en y''

— connaître la structure algébrique de l'ensemble des solutions $\mathscr{S} = y_p + \mathrm{Vect}(h_1, h_2)$ où $\begin{cases} y_p \text{ est une solution particulière} \\ h_1 \text{ et} h_2 \text{ sont des solutions homogènes non colinéaires} \end{cases}$ lorsque l'équation est résolue en y''

— connaître la notion de problème de Cauchy et l'unicité de la solution associée

— identifier une EDL_2 à coefficients constants et déterminer l'ensemble des solutions homogènes à l'aide d'une équation caractéristique

— connaître, dans le cas d'une EDL_2 à coefficients constants, la règle pour la recherche d'une solution particulière analogue à un second membre du type $\mathrm{K}e^{mx}$ avec K et m des scalaires (éventuellement $\mathrm{K}\cos(\omega x)$ ou $\mathrm{K}\sin(\omega x)$ en utilisant la partie réelle/imaginaire de $\mathrm{K}e^{i\omega}$)

— rechercher des solutions (homogènes ou particulières) sous une forme donnée (polynômiale, du type t^α, $e^{\alpha x}$, etc...)

Attention, pas de recherche de solution développable en série entière pour l'instant !

— pourvoir utiliser la méthode de Lagrange (dite d'abaissement de l'ordre) permettant de trouver toutes les solutions sous la forme $y = z \times h$ à l'aide d'une seule solution homogène h ne s'annulant pas

— pouvoir utiliser un changement de variables (qui sera toujours suggéré par le sujet) pour résoudre une EDL_2 à coefficients non constants en le ramenant à une résolution d'une EDL_2 à coefficients constants.

— pouvoir mener un recollement de solutions à l'aide d'un raisonnement par analyse/synthèse en exploitant, par exemple, les développements limités pour caractériser la dérivabilité ponctuelle de y puis de y' traduisant le dérivabilité seconde de y.

On pourra consulter la carte mentale pour la résolution d'une EDL2
On pourra consulter le TD n° 1, le TD n° 2 et le TD n° 3 du chapitre 5

Suite du programme page suivante

CHAPITRE IV   COMPLÉMENTS SUR LES COURBES PLANES

I) Représentation des courbes planes usuelles

Les élèves doivent :
- différentier représentation cartésienne et représentation paramétrique d'une courbe plane
- identifier à partir d'une représentation cartésienne ou paramétrique les droites ou les cercles dans le plan

Révisions sur la géométrie plane de PTSI (exemple et exercice 1) avec la fiche méthodologique bilan où les élèves doivent :
- identifier les droites et les cercles du plan avec leurs éléments caractéristiques;
- savoir introduire et utiliser les outils calculatoires que sont le déterminant et le produit scalaire;
- pouvoir déterminer une projection orthogonale sur une droite et l'utiliser pour calculer la distance d'un point à une droite;
- savoir étudier la position relative d'une droite et d'un cercle;
- savoir étudier la position relative de deux cercles .
- savoir déterminer les tangentes à un point extérieur à un cercle donné.

II) Les coniques

II-1) Définition par foyer, directrice et excentricité et II-2) Equations réduites des coniques propres

Les élèves doivent pourvoir
- déterminer une équation cartésienne d'une conique donnée par un couple foyer/directrice et une excentricité en posant judicieusement un repère adapté au problème
- pourvoir obtenir une équation réduite de la conique à partir d'une équation cartésienne afin de pouvoir l'identifier (avec 3 cas selon la valeur de l'excentricité)
  Pour le moment, on ne proposera aux étudiants que des coniques avec une équation cartésienne sans termes croisés
- faire une représentation de la conique en identifiant ses éléments caractéristiques sur une équation réduite
  Les éléments caractéristiques à savoir identifier à partir d'une équation réduite sont
  - le centre pour une ellipse/hyperbole ou le sommet pour une parabole
  - les axes de symétries et, en particulier, l'axe focal (qui portent les foyers)
  - les demi-axes a et b permettant de positionner les sommets (les tangentes y sont perpendiculaires aux axes)
  - les asymptotes dans le cas d'une hyperbole
  Les élèves n'ont pas à savoir retrouver les foyers, les directrices et l'excentricité à partir d'une équation.
- savoir préciser un paramétrage d'une conique et, réciproquement, savoir identifier une conique comme une courbe usuelle lorsqu'elle est donnée par un paramétrage classique

III) Tangente à une courbe plane, enveloppe d'une famille de droites

III-1) Tangente à une courbe donnée par une représentation paramétrique et III-2) Tangente à une courbe donnée par une équation cartésienne

Les élèves doivent :
- pouvoir déterminer la tangente à une courbe en un point de la courbe que celle-ci soit donnée en représentation paramétrique ou cartésienne
- connaître et calculer le vecteur gradient en un point d'une courbe donnée en représentation cartésienne et savoir que $\overrightarrow{grad} f$, s'il est non nul, est un vecteur normal pour la tangente à la courbe.
- connaître la notion de lignes de niveaux et la direction et l'orientation du champs de gradients associés

III-2) Enveloppe d'une famille de droites

Les élèves doivent :
- définir la notion d'enveloppe d'une famille de droites
- connaître la méthode pratique de détermination d'une enveloppe (raisonnement géométrique à refaire au cas par cas)

• ***Exercices*** :

- Tous les exemples et exercices du chapitre III auront été traités.
- Tous les exemples et exercices du chapitre V auront été traités.
- Les exemples 1 à 4 et les exercices 1 à 3 du chapitre IV auront été traités.

FIN