

L'oral commencera avec une question de cours issue de la la liste des **questions de cours** associée à ce programme et sera évaluée sur 4 points. La réponse à cette question de cours doit être rapide et précise! (Pas plus de 20 minutes)

• **Cours** :

**CHAPITRE III** COMPLÉMENTS SUR LES SÉRIES NUMÉRIQUES

### **I) L'essentiel de la PTSI sur les séries numériques**

Les élèves doivent

- connaître et maîtriser le vocabulaire et les notations usuels des séries (terme général, somme partielle, série convergente/divergente, nature d'une série, somme, reste)
- connaître, reconnaître et utiliser les résultats sur les séries de référence (télescopique, géométrique, Riemann)
- connaître et utiliser les théorèmes sur la convergence des séries numériques (divergence grossière, opérations, série à termes positif, comparaison par inégalités, critère d'équivalence)

### **II) Résultats sur les séries absolument convergente**

#### **II-1) Convergence absolue**

Les élèves doivent

- pouvoir définir la convergence absolue d'une série et savoir qu'elle entraîne la convergence de la série
- utiliser le résultat dit d'inégalités triangulaires sur la somme des séries lorsqu'une série converge absolument
- connaître un exemple de série qui converge sans converger absolument :

Exemple de la série harmonique alternée  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$  avec détermination de la somme

#### **II-2) Les théorèmes de convergence absolue**

Les élèves disposent

- d'un résultat de comparaison et d'un critère d'équivalence pour la convergence absolue
- de la règle du « grand O » ou du « petit o » à utiliser en particulier pour mener une comparaison avec une série de Riemann ou une série géométrique
- de la règle de d'Alembert.

A cette occasion,  $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$  a été définie pour tout  $z \in \mathbb{C}$ . Le lien avec la définition de PTSI  $e^z = e^{\Re(z)} e^{i\Im(z)}$  est admis.

- du résultat sur le produit de Cauchy de deux séries numériques absolument convergentes

Cela permet de justifier que :  $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad e^{z+z'} = e^z e^{z'}$

On pourra consulter **la carte mentale pour l'étude d'une série**

On pourra consulter **le TD n°1** et **le TD n°2** sur ce chapitre.

### **III) Compléments sur les séries à termes réels**

#### **III-1) Technique de comparaison série-intégrale**

Les élèves doivent :

- savoir mettre une technique de comparaison série-intégrale pour étudier la convergence d'une série numérique ou pour estimer ses sommes partielles
- utiliser cette technique pour démontrer le critère de Riemann :  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  converge  $\Leftrightarrow \alpha > 1$

Les séries de Riemann, lorsqu'elles convergent, sont absolument convergentes

**Une fiche méthodologique sur la comparaison série/intégrale** a été distribuée et commentée.

### III-2) Le théorème des séries alternées

Les élèves doivent

- savoir énoncer le résultat et connaître le résultat d'encadrement des sommes partielles et la majoration du reste associé
- connaître l'exemple classique des séries de Riemann alternée  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$  qui converge pour  $\alpha > 0$  (avec CVA si  $\alpha > 1$ )
- pouvoir refaire tout ou partie de la démonstration du théorème des séries alternées à la demande
- savoir que
  - l'hypothèse « le terme général tend vers 0 en décroissant » est essentielle dans le théorème des séries alternées
  - $u_n \sim v_n$  et  $(v_n)$  décroît n'entraîne pas que  $(u_n)$  décroît
  - l'hypothèse de signe ou la CVA est essentielle pour l'utilisation du critère d'équivalence

On pourra consulter **le TD n°3** sur ce chapitre.

## CHAPITRE V COMPLÉMENTS SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

### I) Équations différentielles linéaires d'ordre 1 (Rappels et compléments PTSI)

Les élèves doivent :

- identifier une équation différentielle linéaire d'ordre 1 (EDL<sub>1</sub>), identifier la variable, les coefficients et le second membre et identifier si elle est résolue en  $y'$
- connaître la structure algébrique de l'ensemble des solutions
$$\mathcal{S} = y_p + \text{Vect}(h) \text{ où } \begin{cases} y_p \text{ est une solution particulière} \\ h \text{ est une solution homogène non nulle} \end{cases} \quad \text{lorsque l'équation est résolue en } y'$$
- savoir déterminer l'ensemble des solutions de  $y' + a(t)y = 0$
- connaître le principe de superposition des solutions
- savoir déterminer les solutions de  $y' + a(t)y = b(t)$  par la méthode de variation de la constante
- connaître la notion de problème de Cauchy et l'unicité de la solution associée
- pouvoir mener un recollement de solutions à l'aide d'un raisonnement par analyse/synthèse en exploitant, par exemple, les développements limités pour caractériser la dérivabilité ponctuelle d'une solution.

### II) Équations différentielles linéaires d'ordre 2

Les élèves doivent :

- identifier une équation différentielle linéaire d'ordre 2 (EDL<sub>2</sub>), identifier la variable, les coefficients et le second membre et identifier si elle est résolue en  $y''$
- connaître la structure algébrique de l'ensemble des solutions
$$\mathcal{S} = y_p + \text{Vect}(h_1, h_2) \text{ où } \begin{cases} y_p \text{ est une solution particulière} \\ h_1 \text{ et } h_2 \text{ sont des solutions homogènes non colinéaires} \end{cases} \quad \text{lorsque l'équation est résolue en } y''$$
- connaître la notion de problème de Cauchy et l'unicité de la solution associée
- identifier une EDL<sub>2</sub> à coefficients constants et déterminer l'ensemble des solutions homogènes à l'aide d'une équation caractéristique
- connaître, dans le cas d'une EDL<sub>2</sub> à coefficients constants, la règle pour la recherche d'une solution particulière analogue à un second membre du type  $Ke^{mx}$  avec  $K$  et  $m$  des scalaires (éventuellement  $K\cos(\omega x)$  ou  $K\sin(\omega x)$  en utilisant la partie réelle/imaginaire de  $Ke^{i\omega x}$ )
- rechercher des solutions (homogènes ou particulières) sous une forme donnée (polynômiale, du type  $t^\alpha$ ,  $e^{\alpha x}$ , etc...)

**Attention, pas de recherche de solution développable en série entière pour l'instant!**

- pouvoir utiliser la méthode de Lagrange (dite d'abaissement de l'ordre) permettant de trouver toutes les solutions sous la forme  $y = z \times h$  à l'aide d'une seule solution homogène  $h$  ne s'annulant pas

- pouvoir utiliser un changement de variables ( qui sera toujours suggéré par le sujet) pour résoudre une EDL<sub>2</sub> à coefficients non constants en le ramenant à une résolution d'une EDL<sub>2</sub> à coefficients constants.
- pouvoir mener un recollement de solutions à l'aide d'un raisonnement par analyse/synthèse en exploitant, par exemple, les développements limités pour caractériser la dérivabilité ponctuelle de  $y$  puis de  $y'$  traduisant la dérivabilité seconde de  $y$ .

On pourra consulter [la carte mentale pour la résolution d'une EDL2](#)

On pourra consulter [la fiche bilan pour le changement de variables dans une EDL2](#)

On pourra consulter [le TD n° 1](#) et [le TD n° 2](#) du chapitre 5

- **Exercices** :

- Tous les exemples et exercices du [chapitre III](#) auront été traités.
- Tous les exemples et exercices du [chapitre V](#) auront été traités.

FIN