Questions de cours possibles sur la semaine n° 9 et 10

1. Théorème d'intégration (Rappels PTSI)

- Théorème d'existence des primitives

Si f est une fonction continue sur I alors f admet des primitives.
Pour $a \in \mathrm{I}$, $\left[\varphi : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a autrement dit

φ est dérivable sur I avec $\varphi' = f$ et $\varphi(a) = 0$

Conséquence : Pour $(a,b) \in \mathrm{I}^2$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \left[\mathrm{F}(t)\right]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur I.

En effet, les primitives diffèrent entre elle d'une constante donc $\exists k \in \mathbb{R}$, $\mathrm{F} = \varphi + k$ *et* $\left[\mathrm{F}(t)\right]_a^b = \left[\varphi(t)\right]_a^b = \varphi(b)$

- Fonction définie par une intégrale dépendant de ses bornes

Soient f est une fonction continue sur l'intervalle I et u et v des fonctions dérivables sur l'intervalle J avec $\begin{cases} u(\mathrm{J}) \subset \mathrm{I} \\ v(\mathrm{J}) \subset \mathrm{I} \end{cases}$,

la fonction Φ est définie sur J par : $\displaystyle\Phi(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t$ vérifie $\Phi(x) = \left[\mathrm{F}(t)\right]_{u(x)}^{v(x)} = \mathrm{F}\circ v(x) - \mathrm{F}\circ u(x)$

où F est une primitive quelconque de f sur I (qui existe car f est C^0)

Ainsi, Φ est dérivable sur J avec : $\Phi' = v' \times f\circ v - u' \times f \circ u$

- Convergence des sommes de Riemann (Méthode des rectangles)

Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, *(dans tous les cas, faite un dessin!)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \text{ (rectangle gauche)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \text{ (rectangle droit)}$$

— Inégalité de Taylor-Lagrange

Si f est $(n+1)$ fois dérivable sur un intervalle I (à valeurs réelles ou complexes) telle que

la dérivée $f^{(n+1)}$ est bornée sur I càd $\exists \mathrm{M} > 0, \forall x \in \mathrm{I}, \left|f^{(n+1)}(x)\right| \leqslant \mathrm{M}$

$$\text{alors } \forall (a,b) \in \mathrm{I}^2, \left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!}\right| \leqslant \mathrm{M} \times \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

2. Théorème de calcul intégral (Rappel PTSI) **On pourra vérifier l'assimilation des résultats sur un exemple concret.**

- le théorème d'intégration par parties

Si u et v sont de classe C^1 sur l'intervalle I avec $(a,b) \in \mathrm{I}^2$ alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t = \left[u(t)v(t)\right]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t$$

Pour utiliser un théorème, on justifie ses hypothèses donc on doit vérifier pour IPP : « u et v de classe C^1 sur I »

- le changement de variable

On pose $u = \varphi(t)$ dans $\displaystyle\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\mathrm{d}u$ ou dans $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$ sachant : $\mathrm{d}u = \varphi'(t)\mathrm{d}t$, $t \left| \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right.$, $u \left| \begin{array}{c} \varphi(a) \\ \varphi(b) \end{array} \right.$.

Si φ est de classe C^1 sur $[a,b]$ et f est C^0 sur $\varphi([a,b])$ alors $\displaystyle\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\mathrm{d}u = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$

Pour utiliser un théorème, on justifie ses hypothèses donc on doit vérifier les hypothèses sur φ et f

3. $\boxed{\text{Calculs de primitive (Rappel PTSI)}}$ **On pourra vérifier l'assimilation des méthodes sur un exemple concret.**

- un calcul de primitives $\displaystyle\int \mathrm{P}(x)e^{mx}\mathrm{d}x$ où $\mathrm{P}\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]$

- soit on utilise des intégrations par parties en dérivant $\mathrm{P}(x)$ et en intégrant e^{mx}
- soit on utilise une recherche par coefficients indéterminés car $\int \mathrm{P}(x)e^{mx}\mathrm{d}x = \mathrm{Q}(x)e^{mx}$ avec $\deg \mathrm{Q} = \deg \mathrm{P}$
On cherche la primitive sous la forme $\mathrm{F}(x) = \mathrm{Q}(x)e^{mx}$ en introduisant des coefficients inconnus pour Q (Par exemple : $\mathrm{Q}(x) = ax^2 + bx + c$ si $\deg \mathrm{Q} = 2$) qu'on détermine avec par identification de coefficients avec l'égalité :

$$\mathrm{F}'(x) = \mathrm{P}(x)e^{mx} \Leftrightarrow \left(\mathrm{Q}'(x) + m\mathrm{Q}(x)\right)e^{mx} = \mathrm{P}(x)e^{mx} \Leftrightarrow \mathrm{Q}'(x) + m\mathrm{Q}(x) = \mathrm{P}(x)$$

- un calcul de primitive $\displaystyle\int \cos(\omega x)e^{mx}\mathrm{d}x$ (resp. $\displaystyle\int \sin(\omega x)e^{mx}\mathrm{d}x$) où $(\omega, m)\in\mathbb{R}^2$ distinct de $(0,0)$

- soit avec deux intégrations par parties - soit en remarquant :

$$\cos(\omega x)e^{mx} = \Re e\left(e^{(m+i\omega)x}\right) = \Re e\left(\frac{e^{(m+i\omega)x}}{m+i\omega}\right)' = \left(\Re e\left(\frac{m-i\omega}{m^2+\omega^2}e^{mx}e^{i\omega x}\right)\right)' = \left(\frac{e^{mx}}{m^2+\omega^2}\left(m\cos(\omega x) + \omega\sin(\omega x)\right)\right)'$$

(à adapter avec des parties imaginaires pour $\sin(\omega x)e^{mx}$)

- un calcul de primitives $\displaystyle\int \cos^p(\omega_1 x)\sin^q(\omega_2 x)\mathrm{d}x$ (resp. $\displaystyle\int \mathrm{ch}^p(\omega_1 x)\,\mathrm{sh}^q(\omega_2 x)\mathrm{d}x$) avec $(p,q)\in\mathbb{N}^2$

On linéarise l'expression en développant avec la formule du binôme et à l'aide des formules d'Euler $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$, $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ (resp. des définition $\mathrm{ch}\,\theta = \dfrac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}$ et $\mathrm{sh}\,\theta = \dfrac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}$)
pour aboutir à une expression combinaison linéaire de $\cos(nx)$ et $\sin(mx)$ (resp de $\mathrm{ch}(nx)$ et $\mathrm{sh}(mx)$)
dont on connaît les primitives (Pour n et m non nul : $\cos(nx) = \left(\dfrac{\sin(nx)}{n}\right)'$, $\sin(mx) = \left(-\dfrac{\cos(mx)}{m}\right)'$

- un calcul de primitives $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}$ où $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ avec $a\neq 0$

La démarche à suivre dépend du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

— si $\Delta > 0$ alors $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ avec x_1 et x_2 les deux racines réelles
on recherche alors des réels α et β avec : $\dfrac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \dfrac{\alpha}{x-x_1} + \dfrac{\beta}{x-x_2}$
et : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c} = \alpha\ln|x-x_1| + \beta\ln|x-x_2| + k$ où $k\in\mathbb{R}$

— si $\Delta = 0$ alors $ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$ avec x_0 racine double
et $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c} = \int \frac{\mathrm{d}x}{a(x-x_0)^2} = -\frac{1}{a(x-x_0)} + k,\ k\in\mathbb{R}$

— si $\Delta < 0$ alors on écrit ax^2+bx+c sous forme canonique :

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4a}$$

et on fait apparaître une primitive en $\dfrac{u'}{1+u^2} = \left(\mathrm{Arctan}\,u\right)'$:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{\frac{|\Delta|}{4a}}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{2a}{\sqrt{|\Delta|}}x + \frac{b}{\sqrt{|\Delta|}}\right)^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{|\Delta|}}\int \frac{u'(x)}{1+\left(u(x)\right)^2}\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{|\Delta|}}\mathrm{Arctan}\left(u(x)\right) + k,\ k\in\mathbb{R}$$

$$\text{où } u(x) = \frac{2a}{\sqrt{|\Delta|}}x + \frac{b}{\sqrt{|\Delta|}}$$

Exemples d'applications : théorèmes et méthodes sur le calcul intégral vu en PTSI

1. IPP :

On calcule $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t)\mathrm{d}t$ par IPP avec $\left| \begin{array}{l} u(t) = \ln(1+t) \\ v'(t) = 1 \end{array} \right.$ et $\left| \begin{array}{l} u'(t) = \dfrac{1}{1+t} \\ v(t) = t+1 \end{array} \right.$ où u et v sont C^1 sur $[0,1]$

$$\mathrm{I} = [(t+1)\ln(1+t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{1+t} \times (1+t)\mathrm{d}t = 2\ln 2 - 0 - \int_0^1 \mathrm{d}t = 2\ln 2 - 1$$

Remarques : la primitive en $v(t) = t+1$ est plus astucieuse que la primitive en $v(t) = t$...

2. Changement de variables :

(a) On pose $x = \ln t$ dans $\mathrm{I}_1 = \displaystyle\int_1^e \frac{(\ln t)}{t + t(\ln t)^2}\mathrm{d}t$ $\quad \mathrm{d}x = \dfrac{1}{t}\mathrm{d}t$, $\quad t \left| \begin{array}{c} e \\ 1 \end{array} \right. \quad x \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right.$

$\mathrm{I}_1 = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln t}{1+(\ln t)^2} \times \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$ car on vérifie :

$$\begin{cases} \varphi = [t \mapsto \ln t] \text{ est } \mathrm{C}^1 \text{ sur } [1,e] \\ f = \left[x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}\right] \text{ est } \mathrm{C}^0 \text{ sur } [0,1] \end{cases}$$

(b) On pose $x = \operatorname{Arctan} u$ dans $\mathrm{I}_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$ $\quad \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$, $\quad x \left| \begin{array}{c} \frac{\pi}{4} \\ 0 \end{array} \right.$, $\quad u \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right.$

Hypothèses du changement de variables : $\varphi = [u \mapsto \operatorname{Arctan} u]$ est C^1 sur $[0,1]$ et $f = \left[x \mapsto \dfrac{1}{1+\cos^2 x}\right]$ est C^0 sur $[0, \frac{\pi}{4}]$

Alors : $\quad \mathrm{I}_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\cos^2(\operatorname{Arctan} u)} \times \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ $\quad$ or on rappelle que, lorsque ça existe : $(\tan t)' = \dfrac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$ aussi :

$$\mathrm{I}_2 = \int_0^1 \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\tan^2(\operatorname{Arctan} u)}} \times \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+u^2}} \times \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \int_0^1 \frac{1}{2+u^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2}\mathrm{d}u = \ldots$$

Calcul à finir en posant $t = \frac{u}{\sqrt{2}}$ et on trouve $\mathrm{I}_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{Arctan} \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3. Produit d'un polynôme et d'une exponentielle : Calculons les primitives $\displaystyle\int (2x^2-1)e^{2x}\mathrm{d}x$

Méthode 1 : $f(x) = (2x^2-1)e^{2x}$ a une primitive en $\mathrm{F}(x) = (ax^2+bx+c)e^{2x}$ où on détermine les réels a, b et c car

$$\mathrm{F}'(x) = f(x) \Leftrightarrow (2ax+b)\cancel{e^{2x}} + 2(ax^2+bx+c)\cancel{e^{2x}} = (2x^2-1)\cancel{e^{2x}} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 2 \\ 2a+2b = 0 \\ b+2c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 0 \end{cases}$$

aussi : $\displaystyle\int (2x^2-1)e^{2x}\mathrm{d}x = (x^2-x)e^{2x} + k$ où $k \in \mathbb{R}$

Méthode 2 : On fait deux IPP successives. D'abord avec $\left| \begin{array}{l} u_1(x) = 2x^2-1 \\ v_1'(x) = e^{2x} \end{array} \right.$ soit $\left| \begin{array}{l} u_1'(x) = 4x \\ v_1(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right.$ où u_1 et v_1 sont C^1 sur $\mathbb{R}$

$$\int (2x^2-1)e^{2x}\mathrm{d}x = (2x^2-1) \times \frac{1}{2}e^{2x} - \int 4x \times \frac{1}{2}e^{2x}\mathrm{d}x = (x^2 - \frac{1}{2})e^{2x} - 2\int xe^{2x}\mathrm{d}x$$

puis avec $\left| \begin{array}{l} u_2(x) = x \\ v_2'(x) = e^{2x} \end{array} \right.$ soit $\left| \begin{array}{l} u_2'(x) = 1 \\ v_2(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right.$ où u_2 et v_2 sont C^1 sur $\mathbb{R}$

$$\int (2x^2-1)e^{2x}\mathrm{d}x = (x^2-\frac{1}{2})e^{2x} - 2\left(\frac{x}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\mathrm{d}x\right) = (x^2-\frac{1}{2})e^{2x} - xe^{2x} + \frac{1}{2}e^{2x} + k = (x^2-x)e^{2x} + k \text{ où } k \in \mathbb{R}$$

4. Produit d'un cosinus/sinus et d'une exponentielle : Calculer $\mathrm{K} = \displaystyle\int_0^1 e^{2x}\sin(\pi x)\mathrm{d}x$.

Méthode 1 : $\quad f(x) = e^{2x}\sin(\pi x) = \Im m\left(e^{2x}e^{i\pi x}\right) = \Im m\left(e^{(2+i\pi)x}\right) = \Im m\left(\left(\dfrac{e^{(2+i\pi)x}}{2+i\pi}\right)'\right) = \left(\Im m\left(\dfrac{e^{(2+i\pi)x}}{2+i\pi}\right)\right)'$.

Ainsi, une primitive F de f sur $\mathbb{R}$:

$$\mathrm{F}(x) = \Im m\left(\frac{e^{(2+i\pi)x}}{2+i\pi}\right) = \Im m\left(\frac{1}{2+i\pi} \times \underbrace{e^{2x}}_{\in\mathbb{R}} e^{i\pi x}\right) = e^{2x} \times \Im m\left(\frac{2-i\pi}{4+\pi^2} \times (\cos(\pi x) + i\sin(\pi x))\right) = \frac{e^{2x}}{4+\pi^2}\left(2\sin(\pi x) - \pi\cos(\pi x)\right)$$

Et donc : $\mathrm{K} = \displaystyle\int_0^1 e^{2x}\sin(\pi x)\mathrm{d}x = \frac{e^2}{4+\pi^2}(2\times 0 - \pi \times -1) - \frac{1}{4+\pi^2}(2 \times 0 - \pi) = \frac{\pi(e^2+1)}{4+\pi^2}$.

Méthode 2 : On fait deux IPP successives. D'abord avec $\left| \begin{array}{l} u_1(x) = \sin(\pi x) \\ v_1'(x) = e^{2x} \end{array} \right.$, $\left| \begin{array}{l} u_1'(x) = \pi\cos(\pi x) \\ v_1(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right.$ où u_1 et v_1 sont C^1 sur $\mathbb{R}$

$K = \underbrace{[\frac{e^{2x}}{2}\sin(\pi x)]_0^1}_{=0} - \frac{\pi}{2}\int_0^1 \cos(\pi x)e^{2x}dx$ puis avec $\left| \begin{array}{l} u_2(x) = \cos(\pi x) \\ v_2'(x) = e^{2x} \end{array} \right.$, $\left| \begin{array}{l} u_2'(x) = -\pi\sin(\pi x) \\ v_2(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right.$ où u_2 et v_2 sont C^1 sur $\mathbb{R}$

$K = -\frac{\pi}{2}\left([\frac{e^{2x}}{2}\cos(\pi x)]_0^1 - \frac{(-\pi)}{2}\int_0^1 \sin(\pi x)e^{2x}dx\right) = -\frac{\pi}{2}\left(\frac{-e^2-1}{2} + \frac{\pi}{2}K\right) \Rightarrow K\left(1+\frac{\pi^2}{4}\right) = \frac{\pi}{4}(e^2+1) \Rightarrow K = \frac{\pi(e^2+1)}{4+\pi^2}$

5. Linéarisation (ou analogue à une linéarisation) : Calcul de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\ln 2}{4}} \operatorname{ch}^2(x)\operatorname{sh}^2(x)dx$

(a) On linéarise le $\sin^3(x)$:

$\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{8i}\left(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}\right) = -\frac{1}{8i}\left(\underbrace{e^{3ix}-e^{-3ix}}_{=2i\sin(3x)} + 3\times(\underbrace{e^{-ix}-e^{-ix}}_{=2i\sin x}\right)$

soit : $sin^3(x) = -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)$ et on obtient alors une primitive : $\sin^3(x) = \left(\frac{1}{12}\cos(3x) - \frac{3}{4}\cos(x)\right)'$

aussi : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = \left[\frac{1}{12}\cos(3x) - \frac{3}{4}\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{12} + \frac{3}{4} = \frac{2}{3}$

(b) Avec les définitions :

$\operatorname{ch}^2(x)\operatorname{sh}^2(x) = \frac{(e^x+e^{-x})^2}{4} \times \frac{(e^x-e^{-x})^2}{4} = \frac{1}{16}\left((e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x})\right)^2$ ou bien $= \frac{1}{16}(e^{2x}+2+e^{-2x})(e^{2x}-2+e^{-2x})$

$= \cdots = \frac{1}{16}\left(\underbrace{e^{4x}+e^{-4x}}_{=2\operatorname{ch}(4x)} - 2\right)$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\ln 2}{4}} \operatorname{ch}^2(x)\operatorname{sh}^2(x)dx = \int_0^{\frac{\ln 2}{4}} \left(\frac{1}{8}\operatorname{ch}(4x) - \frac{1}{8}\right)dx = \frac{1}{8}\left[\frac{\operatorname{sh}(4x)}{4} - x\right]_0^{\frac{\ln 2}{4}} = \frac{1}{32}\operatorname{sh}(\ln 2) - \frac{\ln 2}{32} = \frac{1}{32}\times\left(\frac{2-\frac{1}{2}}{2}\right) - \frac{\ln 2}{32} = \frac{3}{128} - \frac{\ln 2}{32}$

6. Primitive en $\displaystyle\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ où $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$ Calculons $K = \displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2+2x-3}$, $L = \displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{9+6x+x^2}$ et $M = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^2}$

(a) $x^2+2x-3 = (x-1)(x+3)$ aussi on cherche $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$:

$\forall x\in[-1,0],\ \frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x+3} = \frac{(\alpha+\beta)x+3\alpha-\beta}{(x-1)(x+3)} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha+\beta = 0 \\ 3\alpha-\beta = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta = -\alpha \\ \alpha = \frac{1}{4} \end{array} \right.$

Ainsi : $K = \displaystyle\frac{1}{4}\int_{-1}^0 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3}\right)dx = \frac{1}{4}\left[\ln|x-1| - \ln|x+3|\right]_{-1}^0 = \frac{-\ln 3}{4}$

(b) $L = \displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{9+6x+x^2} = \int_1^2 \frac{dx}{(3+x)^2} = \left[-\frac{1}{3+x}\right]_1^2 = -\frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$

(c) $\forall x\in\mathbb{R},\ 1+x+x^2 \neq 0$ puisque le discriminant est $\Delta = -3 < 0$ et $x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

aussi : $M = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{dx}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right)\right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{Arctan}\sqrt{3} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

soit $M = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$