Questions de cours possibles sur la semaine n° 7 et 8

1. Nombres complexes (partie 1) (rappels PTSI)

- Technique de factorisation par l'angle moitié

Cela concerne les complexes de la forme $e^{i\alpha} \pm e^{i\beta}$ où (α,β) sont des réels fixés (donc en particulier $e^{i\theta} \pm 1$ avec $\alpha=\theta$, $\beta=0$). L'angle moitié est $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ aussi on écrit : $e^{i\alpha} \pm e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \pm e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)$

Le complexe entre parenthèse s'interprète via les formules d'Euler : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

On obtient ainsi une écriture $e^{i\alpha} \pm e^{i\beta} = \mathrm{R}e^{i\phi}$ (Rappel : $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$) où R est un réel (Attention! Il n'est pas forcément positif) qui permet de déterminer la forme exponentielle (si $\mathrm{R}<0$ alors $\mathrm{R} = -|\mathrm{R}| = |\mathrm{R}|e^{i\pi}$)

- Racines carrées d'un nombre complexe.

Une racine carrée d'un complexe a est un nombre complexe z tel que $z^2 = a$.
Si $a \neq 0$, il a exactement deux racines carrées complexes de a qui sont des nombres opposés.

Attention : l'écriture $\sqrt{a}$ n'a de sens que si $a \geqslant 0$, elle ne s'utilise pas si $a \in \mathbb{C} - [0,+\infty[$!

En pratique, il suffit de trouver $a = \delta^2$ et les racines carrées sont alors δ et $-\delta$.
On peut procéder :
- soit de façon astucieuse à l'aide d'identités remarquables
Exemples : $-36 = (6i)^2$, $2i = (1+i)^2$ ou bien en remarquant que $(x+iy)^2 = x^2-y^2+2ixy$ pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ aussi, pour $9+40i$, on veut $xy = 20 = 4\times 5$ or $5^2-4^2 = 9$ d'où $9+40i = 5^2+(4i)^2+2\times5\times(4i) = (5+4i)^2$)
- soit en les cherchant sous forme exponentielle si $a = \rho e^{i\alpha}$ avec $\rho>0, \alpha\in\mathbb{R}$: $a = (\sqrt{\rho})^2\left(e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)^2 = \left(\sqrt{\rho}e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)^2$
Exemple : $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \left(2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^2$
- soit en les cherchant sous forme algébrique :

$$(x+iy)^2 = a \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2 = \Re e(a)\ (i) \\ 2xy = \Im m(a)\ (ii) \end{cases} \quad \text{et } x^2+y^2 = |(x+iy)^2| = |a|\ (iii)$$

On détermine x^2 et y^2 avec (i) et (iii) et on sait avec (ii) si x et y ont le même signe ou pas.

- Équation polynômiale du 2nd degré à coefficients complexes. Équations polynômiales avec racines évidentes.

Il s'agit d'une équation $az^2+bz+c=0$ où $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$ et $a\neq 0$
On commence par calculer le discriminant $\Delta = b^2-4ac$. Si $\Delta = 0$ alors il y a une racine double $\dfrac{-b}{2a}$.
Sinon on détermine une racine carrée δ de Δ et les solutions sont $z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2\dfrac{-b+\delta}{2a}$
On a alors la factorisation : $az^2+bz+c = a(z-z_1)(z-z_2)$ de sorte que $z_1z_2 = \dfrac{c}{a}$ et $z_1+z_2 = -\dfrac{b}{a}$
<u>Remarque</u> : si $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ alors $\Delta\in\mathbb{R}$ (si $\Delta>0$, $\delta = \sqrt{\Delta}$ convient, si $\Delta<0$, alors $\Delta = -|\Delta| = (i\sqrt{|\Delta|})^2$ et $\delta = i\sqrt{|\Delta|}$ convient)
Les formules du secondaire ne sont que des cas particuliers (si $\Delta<0$, les racines sont complexes conjuguées)

Pour une équation $\mathrm{P}(z) = 0$ de degré 3 ou plus, on commence par chercher une racine évidente z_0.
Sans indication, on cherche des racines réelles x solutions de $\Re e\big(\mathrm{P}(x)\big) = 0 = \Im m\big(\mathrm{P}(x)\big)$ ou des racines imaginaires pures ix solutions de $\Re e\big(\mathrm{P}(ix)\big) = 0 = \Im m\big(\mathrm{P}(ix)\big)$.
On factorise ensuite $\mathrm{P}(z)$ par la racine évidente z_0 : $\mathrm{P}(z) = (z-z_0)\mathrm{Q}(z)$ (à l'aide d'une méthode de coefficients indéterminés ou d'une division de polynôme) puis on cherche les racines de Q (sachant que $\deg \mathrm{Q} = \deg \mathrm{P} - 1$)

2. $\boxed{\text{Suites numériques (rappels PTSI)}}$

- Étude d'une suite arithmético-géométrique

Il s'agit des suites qui suivent une relation de récurrence du type $u_{n+1} = au_n + b$ avec $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ fixés.
- Si $a = 1$ autrement dit $u_{n+1} = u_n + b$ c'est une suite arithmétique de raison b et :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nb \text{ (ou } = u_p + (n-p)b \text{ si premier terme en } p)$$
- Si $b = 0$ autrement dit $u_{n+1} = au_n$ c'est une suite géométrique de raison a et :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 a^n \text{ (ou } = u_p a^{n-p} \text{ si premier terme en } p)$$
- Si $a \neq 1$ et $b \neq 0$:
  – on introduit le réel ℓ solution de l'équation caractéristique (ou équation aux limites) : $\ell = a\ell + b \Leftrightarrow \ell = \dots$
  – on remarque que la suite $\left(u_n - \ell\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique (raisonnement à refaire!) :
$$\begin{cases} u_{n+1} = au_n + b \\ \ell = a\ell + b \end{cases} \Rightarrow u_{n+1} - \ell = (au_n + b) - (a\ell + b) = a(u_n - \ell)$$
  – on utilise le résultat sur les suites géométriques : $u_n - \ell = (u_0 - \ell) \times a^n$ d'où l'expression de u_n

- Étude des suites récurrentes linéaires scalaires d'ordre 2

(voir tableau à la fin)

- Suites adjacentes

Définition : Deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque les suites (u_n) et (v_n) sont monotones et de monotonie contraire et $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Théorème : Si les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes alors les deux suites (u_n) et (v_n) convergent dans $\mathbb{R}$ vers une même limite : $\exists \ell \in \mathbb{R},\ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

- Suites extraites

– Une suite extraite de la suite (u_n) est une suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.
– Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ alors toutes les suites extraites de (u_n) convergent vers ℓ.
La réciproque est fausse mais il y a une pseudo-réciproque au programme :
$$\begin{cases} u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \\ u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \end{cases} \Rightarrow u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$
Par contraposée : si on trouve deux suites extraites qui convergent vers des limites distinctes, (u_n) n'a pas de limite.

- Suites monotones (définition, théorème de convergence pour les suites monotones réelles)

– Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone si elle est croissante ($\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$) ou décroissante ($\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$).

– (Théorème de la limite monotone)
Une suite réelle monotone admet soit une limite réelle soit elle tend vers $\pm\infty$:
  - si elle est croissante, elle tend vers le réel $\ell = \sup\left\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ si elle est majorée ou vers $+\infty$ sinon.
  - si elle est décroissante, elle tend vers le réel $\ell = \inf\left\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ si elle est minorée ou vers $-\infty$ sinon.

Méthode Pour étudier la monotonie d'une suite, on peut :
- si $u_n = f(n)$ où $f : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, étudier la fonction f
- si u_n est constitué de produit (puissance, factorielle, etc) avec un signe constant, on compare $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1
- sinon on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$ (ce qui est en particulier bien adaptée lorsque u_n est une somme)

3. $\boxed{\text{Equations différentielles linéaires (rappels PTSI)}}$

- Résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 $\quad y' + a(x)y = b(x)$ où a et b C^0 sur l'intervalle I

On sait que l'ensemble solution est de la forme $\mathscr{S} = \left\{y_0 + C \times h \mid C \in \mathbb{K}\right\} = y_0 + \text{Vect}(h)$ où

- h est une solution de l'équation homogène $y' + a(x)y = 0$: $h(x) = e^{-A(x)}$ avec A <u>une</u> primitive de a sur I.
  Remarques : On simplifie au maximum les exponentielles/logarithmes. En cas de présence de valeurs absolues, on peut éventuellement faire porter le signe sur la constante C si l'expression en valeur absolue garde un signe constant sur I et faire "disparaître" les valeurs absolues.
- y_0 est <u>une</u> solution particulière qu'on peut obtenir
  > en la cherchant analogue au 2nd membre quitte à utiliser le principe de superposition des solutions
  > en utilisant le principe de variations de la constantes : on cherche y_0 avec $y_0(x) = C(x)h(x)$ où on détermine la fonction inconnue C de classe C^1 sur I par :

$$C'(x)h(x) + \underbrace{C(x)h'(x) + a(x)C(x)h(x)}_{=0} = b(x) \Leftrightarrow C'(x) = \frac{b(x)}{h(x)}$$

On ne remplace h que pour la recherche de primitive

- Résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 scalaires homogène

$$ay'' + by' + cy = 0 \text{ avec } (a,b,c) \in \mathbb{K}^3 \text{ fixé}$$

(voir tableau à la fin)

- Résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 scalaires

$$ay'' + by' + cy = d(x) \text{ avec } (a,b,c) \in \mathbb{K}^3 \text{ fixé et } d \text{ continue sur l'intervalle I}$$

Structure de l'ensemble des solutions et règles à connaître pour la forme d'une solution particulière.

On sait que l'ensemble des solutions est $\quad \mathscr{S} = \{y_0 + h \mid h \in \mathscr{S}_h\} = y_0 + \mathscr{S}_h$ où
$\mathscr{S}_h$ est l'ensemble des solutions de l'équation homogène et y_0 est <u>une</u> solution particulière.
On obtient y_0 par analogie avec le second membre éventuellement avec le principe de superposition.
On connaît 2 règles précisant la forme de y_0 où on note $(*)$: $ar^2 + br + c = 0$ l'équation caractéristique.

- $\boxed{\text{si } d(x) = Ce^{mx} \text{ où } C \in \mathbb{R}}$ alors
  <u>si m n'est pas racine de $(*)$</u> , on recherche y_0 sous la forme $y_0(x) = ke^{mx}$ avec k à déterminer
  <u>si m est racine simple de $(*)$</u> , on recherche y_0 sous la forme $y_0(x) = kxe^{mx}$ avec k à déterminer
  <u>si m est racine double de $(*)$</u> , on recherche y_0 sous la forme $y_0(x) = kx^2e^{mx}$ avec k à déterminer
- $\boxed{\text{si } d(x) = C\cos(\omega x) = \Re e\left(Ce^{i\omega x}\right) \text{ ou } d(x) = C\sin(\omega x) = \Im m\left(Ce^{i\omega x}\right)}$ alors
  <u>si $i\omega$ n'est pas racine de $(*)$</u> , on recherche y_0 sous la forme $y_0(x) = \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)$ où $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ sont à déterminer (i.e $\Re e\left(ke^{i\omega x}\right)$ où $k \in \mathbb{C}$)
  <u>si $i\omega$ est racine simple de $(*)$</u> , on recherche y_0 sous la forme $y_0(x) = \alpha x\cos(\omega x) + \beta x\sin(\omega x)$ où $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ sont à déterminer (i.e $\Re e\left(kxe^{i\omega x}\right)$ où $k \in \mathbb{C}$)
  <u>si $i\omega$ est racine double de $(*)$</u> , on recherche y_0 sous la forme $y_0(x) = \alpha x^2\cos(\omega x) + \beta x^2\sin(\omega x)$ où $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ sont à déterminer (i.e $\Re e\left(kx^2e^{i\omega x}\right)$ où $k \in \mathbb{C}$)

Equations différentielles linéaires d'ordre 2/ Suite récurrente linéaire d'ordre 2

Pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
l'équation différentielle $ay''+by'+cy=0$ et la relation de récurrence linéaire $\forall n \in \mathbb{N},\ au_{n+2}+bu_{n+1}+cu_n=0$
possède la même **équation caractéristique** $ar^2+br+c=0$ dont on notera Δ le discriminant.
L'ensemble des solutions est toujours un sous-espace vectoriel de dimension 2 dont on connaît une base.
L'expression de la solution est ainsi exprimée à l'aide de deux constantes réelles A et B par :

Si l'équation caractéristique possède	l'expression de $y(t)$ est	l'expression de u_n est
2 racines distinctes r_1 et r_2 $(\Delta>0)$ L'ensemble de solutions est	$y(t)=\mathrm{A}e^{r_1t}+\mathrm{B}e^{r_2t}$ $\mathscr{S}=\mathrm{Vect}(f,g)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ où $f:t\mapsto e^{r_1t}$ et $g:t\mapsto e^{r_2t}$	$u_n=\mathrm{A}r_1^n+\mathrm{B}r_2^n$ $\mathscr{S}=\mathrm{Vect}(a,b)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ où $a=(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $b=(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$
1 racine double r_0 $(\Delta=0)$ L'ensemble de solutions est	$y(t)=\mathrm{A}te^{r_0t}+\mathrm{B}e^{r_0t}=(\mathrm{A}t+\mathrm{B})e^{r_0t}$ $\mathscr{S}=\mathrm{Vect}(f,g)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ où $f:t\mapsto te^{r_0t}$ et $g:t\mapsto e^{r_0t}$	$u_n=\mathrm{A}nr_0^n+\mathrm{B}r_0^n=(\mathrm{A}n+\mathrm{B})r_0^n$ $\mathscr{S}=\mathrm{Vect}(a,b)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ où $a=(nr_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $b=(r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$
2 racines complexes conjuguées $r_\pm$ L'ensemble de solutions est	$y(t)=e^{\alpha t}\big(\mathrm{A}\cos(\omega t)+\mathrm{B}\sin(\omega t)\big)$ où $r_\pm=\alpha\pm i\omega$ (forme algébrique) $\mathscr{S}=\mathrm{Vect}(f,g)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ où $f:t\mapsto e^{\alpha t}\cos(\omega t)$ et $g:t\mapsto e^{\alpha t}\sin(\omega t)$	$u_n=\rho^n\big(\mathrm{A}\cos(n\theta)+\mathrm{B}\sin(n\theta)\big)$ où $r_\pm=\rho e^{\pm i\theta}$ (forme exponentielle) $\mathscr{S}=\mathrm{Vect}(a,b)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ où $a=(\rho^n\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ et $b=(\rho^n\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$

Des petits trucs pour mémoriser :

- L'équation caractéristique réunit des conditions à vérifier pour que des vecteurs bien connus soient solutions

  les fonctions exponentielle $y=[t\mapsto e^{rt}]$ où / les suites géométriques $u=(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ où

  $ay''(t)+by'(t)+cy(t)=(ar^2+br+c)e^{rt}$ / $au_{n+2}+bu_{n+1}+cu_n=(ar^2+br+c)r^n$

- Dans le cas des racines complexes conjuguées, l'expression est la partie réelle de la solution complexe

  $y(t)=\Re e\Big(\lambda e^{r_+t}+\mu e^{r_-t}\Big)$ / $u_n=\Re e\Big(\lambda r_+^n+\mu r_-^n\Big)$ avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}$

  On utilise donc pour l'écriture des racines complexes conjuguées la forme la plus "efficace" :

  $e^{r_\pm t}=e^{(\alpha\pm i\omega)t}=e^{\alpha t}e^{\pm i\omega t}$ / $\big(r_\pm\big)^n=\Big(\rho e^{\pm i\theta}\Big)^n=\rho^n e^{\pm in\theta}$