Questions de cours possibles sur les semaines n° 5 et 6

1. **Théorèmes d'analyse usuels**

- Énoncé du théorème des valeurs intermédiaires

  Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et si $\left[f : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}\right]$ est continue sur I alors $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$ est un intervalle de $\mathbb{R}$
  soit : Pour tout $(a,b) \in \mathrm{I}^2$ et pour tout y entre $f(a)$ et $f(b)$ alors y est dans $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$ (càd $\exists c \in \mathrm{I},\ y = f(c)$)
  La continuité assure l'existence d'un antécédent mais celui-ci n'est pas forcément unique...

- Énoncé du théorème de la bijection

  Si $\begin{cases} \mathrm{I} \text{ est un intervalle de } \mathbb{R} \\ \left[f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}\right] \text{ est } \mathrm{C}^0 \text{ sur I} \\ f \text{ est strictement monotone sur I} \end{cases}$ alors f réalise une bijection de I dans l'intervalle $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$
  autrement dit : pour tout $[a,b] \subset \mathrm{I}$, si y est entre $f(a)$ et $f(b)$ alors : $\exists! x \in [a,b],\ y = f(x)$
  La réciproque $\left[f^{-1} : \mathrm{J} \to \mathrm{I}\right]$ est C^0 et strictement monotone sur J de même monotonie que f

- Énoncé du théorème des bijections réciproques

  Si $\begin{cases} \mathrm{I} \text{ est un intervalle de } \mathbb{R} \\ \left[f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}\right] \text{ est } \mathrm{C}^0 \text{ sur I} \\ f \text{ est strictement monotone sur I} \end{cases}$ alors f réalise une bijection de I dans l'intervalle $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$
  La réciproque $\left[f^{-1} : \mathrm{J} \to \mathrm{I}\right]$ est C^0 et strictement monotone sur J de même monotonie que f
  Si f est dérivable sur I alors : f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0) \neq 0$ et alors $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$
  Si f est dérivable sur I et ne s'y annule pas, f^{-1} est dérivable sur J et $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$

- Énoncé du théorème de Rolle

  Soit $\left[f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}\right]$, si $\begin{cases} f \text{ est } \mathrm{C}^0 \text{ sur } [a,b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a,b[\\ f(a) = f(b) \end{cases}$ alors $\exists c \in]a,b[,\ f'(c) = 0$

- Énoncé de l'égalité des accroissements finis

  Soit $\left[f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}\right]$, si $\begin{cases} f \text{ est } \mathrm{C}^0 \text{ sur } [a,b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a,b[\end{cases}$ alors $\exists c \in]a,b[,\ f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

- Énoncé de l'inégalité des accroissements finis (version f lipschitzienne)

  Soit $\left[f : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}\right]$, si f est C^0 et dérivable sur un intervalle I avec $\exists k > 0 \forall x \in \mathrm{I},\ |f'(x)| \leqslant k$ alors
  f est k-lipschitzienne sur I c'est à dire que : $\forall (x,y) \in \mathrm{I}^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$

- Énoncé de l'inégalité des accroissement finis (version double inégalités)

  Soit $\left[f :]a,b[\subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}\right]$, si f est C^0 sur $[a,b]$ et dérivable sur un intervalle $]a,b[$ avec
  $\exists (m,\mathrm{M}) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in]a,b[,\ m \leqslant f'(x) \leqslant \mathrm{M}$ alors : $m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant \mathrm{M}(b-a)$

- Énoncé du théorème de la limite d'une dérivée

  Si $\begin{cases} f \text{ est } \mathrm{C}^0 \text{ sur } [a,b] \\ f \text{ est dérivable sur } [a,b[\\ \lim\limits_{x \to b} f'(x) = \ell \in \mathbb{R} \text{ existe} \end{cases}$ alors f est dérivable en b et $f'(b) = \ell$
  Rem 1 : Si f et C^1 sur $[a,b[$ et C^0 en b avec $\lim\limits_{x \to b} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$ existe alors f est C^1 sur $[a,b]$ avec $f'(b) = \ell$
  Rem 2 : Si $\ell = \pm\infty$, alors f n'est pas dérivable en b mais qu'il y a une demi-tangente verticale.

- Énoncé de la formule de Leibniz pour des fonctions réelles

  Si $\left[f : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}\right]$ et $\left[g : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}\right]$ sont de classe C^n sur l'intervalle I alors fg est de classe C^n sur I et
  $$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$
  Rem 1 : on peut remplacer "de classe C^n" par " n fois dérivable sur "
  Rem 2 : on peut proposer des variantes en lien avec le cours "Courbe paramétrée" de PT : formule pour un produit $\alpha \overrightarrow{f}$ où $\left[\alpha : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}\right]$ et $\left[\overrightarrow{f} : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\right]$, un produit scalaire $\overrightarrow{f} . \overrightarrow{g}$ ou un produit vectoriel $\overrightarrow{f} \wedge \overrightarrow{g}$

- Énoncé de la formule de Taylor-Young

Si $[f :]a-\delta, a+\delta[\subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}]$ est de classe C^n sur le voisinage $]a-\delta, a+\delta[$ de a (avec $\delta > 0$) alors

$$f \text{ admet un } DL_n(a) \text{ donné par : } f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + o(h^n)$$

Rem : on peut aussi écrire : $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \dfrac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \dfrac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + o\Big((x-a)^n\Big)$

2. Algèbre linéaire PTSI

- Définitions et propriétés associés au noyau et à l'image d'une application linéaire

Si E et F sont des $\mathbb{K}$ev et si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ alors
$\operatorname{Ker} f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$ est un sev de E et on a : f injective $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$
$\operatorname{Im} f = \{y \in F \mid \exists x \in E,\ y = f(x)\}$ est un sev de F et on a : f surjective $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = F$
On rappelle que :
f est injective lorsque $\forall (x, x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$
f est surjective lorsque $\forall y \in F, \exists x \in E,\ y = f(x)$
f est bijective lorsqu'elle est injective et surjective et alors : $\forall y \in F, \exists! x \in E,\ y = f(x)$

- Énoncé du théorème du rang

Soient E et F des $\mathbb{K}$ev et soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, si E est de dimension finie alors $\quad \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg}(f) = \dim E$
On rappelle que : $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Vect}\Big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\Big)$ où $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base quelconque de E.

Cas des matrices : Pour une matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, le noyau et l'image de A coïncident respectivement avec le noyau et l'image de l'application linéaire $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ canoniquement associée à A.
Le théorème du rang s'écrit donc : $\quad \dim \operatorname{Ker} M + \dim \operatorname{Im} M = \dim \mathbb{K}^p$

- Définition de la matrice d'une application linéaire

Soient E et F sont des $\mathbb{K}$ev de dimensions finies, soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$
et soient $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ une base de F
alors la matrice de f relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ est $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}\Big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\Big) \in M_{p,n}(\mathbb{K})$
autrement dit la j ieme colonne de cette matrice correspond aux coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{C}$

Si $A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ alors on peut traduire l'égalité vectorielle $y = f(x)$ matriciellement : $y = f(x) \Leftrightarrow Y = AX$
avec X colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}$ et Y colonne des coordonnées de y dans $\mathscr{C}$

- Définition des matrices de passage et formule de changement de bases pour les coordonnées

Soit E est un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie et si $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ sont deux bases de E
alors la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ notée $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$
C'est une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ où $n = \dim E$ et la j ieme colonne donne les coordonnées de e'_j dans $\mathscr{B}$.
Si X est la colonne des coordonnées d'un vecteur x de E dans $\mathscr{B}$, X′ celle des coordonnées de x dans $\mathscr{B}'$

$$\text{alors } X = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}X'$$

- Énoncé de la formule de changement de base pour une application linéaire

Soient E et F sont des $\mathbb{K}$ev de dimensions finies, soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$
et soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E avec $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ et $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux bases de F avec $Q = P_{\mathscr{C}\to\mathscr{C}'}$

$$\text{si } A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \text{ et } A' = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f) \text{ alors } A' = Q^{-1}AP$$

En particulier : si $E = F, \mathscr{B} = \mathscr{C}$ et $\mathscr{B}' = \mathscr{C}'$ alors $A' = P^{-1}AP$

Rappels : Dans ce contexte, avec X et X′ les coordonnées de x dans $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, Y et Y′ les coordonnées de $y = f(x)$ dans $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$

$$Y = AX, \quad Y' = A'X', \quad X = PX', \quad Y = QY' \quad \text{alors} \quad Y' = Q^{-1}Y = Q^{-1}AX = Q^{-1}APX' \quad \text{redonne} \quad A' = Q^{-1}AP$$

- Définition du produit matriciel.

On note $[M]_{ij}$ le coefficient de la ligne i, colonne j de la matrice M.

Si $A \in M_{np}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{pq}(\mathbb{K})$ alors $AB \in M_{nq}(\mathbb{K})$ existe et : $\forall i \in [\![1, n]\!], \forall j \in [\![1, q]\!], \quad [M]_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} [A]_{ik}[B]_{kj}$

- Énoncé de la formule du binôme pour des matrices carrées

Si A et B sont deux matrices de $M_p(\mathbb{K})$ qui commutent (càd AB = BA) alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} \quad \text{et on rappelle que} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$