Questions de cours possibles sur la semaine n° 3 et 4

1. Fonctions usuelles

- Connaissances sur les fonctions ch et sh ?

Elles sont définies sur $\mathbb{R}$ par : $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ aussi $\begin{cases} \text{ch est paire et à valeurs dans } [1, +\infty[\\ \text{sh est impaire} \quad (\operatorname{sh}(0) = 0 \text{ et } \operatorname{ch}(0) = 1) \end{cases}$

On a : $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ Elles sont strictement croissantes sur $[0, +\infty[$ avec $\operatorname{ch} x \sim_{+\infty} \dfrac{e^x}{2} \sim_{+\infty} \operatorname{sh} x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ (Allures graphiques à connaître)

Elles sont C^∞ sur $\mathbb{R}$ avec $\begin{cases} \operatorname{ch}' = \operatorname{sh} \\ \operatorname{sh}' = \operatorname{ch} \end{cases}$ puis $\operatorname{ch}^{(n)} = \begin{cases} \operatorname{ch} \text{ si } n \text{ pair} \\ \operatorname{sh} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$ $\operatorname{sh}^{(n)} = \begin{cases} \operatorname{sh} \text{ si } n \text{ pair} \\ \operatorname{ch} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$

Au voisinage de 0 : $\operatorname{ch} x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$ $\operatorname{sh} x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$

- Connaissances sur les fonctions cos et sin ?

Elles sont définies sur $\mathbb{R}$, 2π périodique et à valeurs dans $[-1, 1]$. cos est paire et sin est impaire.
On a : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$ et $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$

Elles sont C^∞ sur $\mathbb{R}$ avec : $\begin{cases} \cos' = -\sin \\ \sin' = \cos \end{cases}$ $\left(\cos x\right)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ et $\left(\sin x\right)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

Au voisinage de 0 : $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$ $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$

<u>À la demande</u> : Valeurs remarquables en 0, $\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{\pi}{2}$ à connaître à la demande (utiliser le cercle trigonométrique)

<u>À la demande</u> : Relations obtenues sur le cercle trigonométrique (type $\sin(\pi - x) = \sin x$, $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin x$, *etc*

<u>À la demande</u> : Formules de trigonométrie classique

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ $\quad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ $\quad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

Les factorisations de $\cos(p) \pm \cos(q)$ et $\sin(p) \pm \sin(q)$

Ne jamais oublier : $\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$ d'où $\cos x = \Re e\left(e^{ix}\right)$ et $\sin x = \Im m\left(e^{ix}\right)$ pour retrouver des résultats :

- $\cos(a+b) = \Re e\left(e^{i(a+b)}\right) = \Re e\left(e^{ia}e^{ib}\right) = \Re e\left((\cos a + i\sin a)(\cos b + i \sin b)\right) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

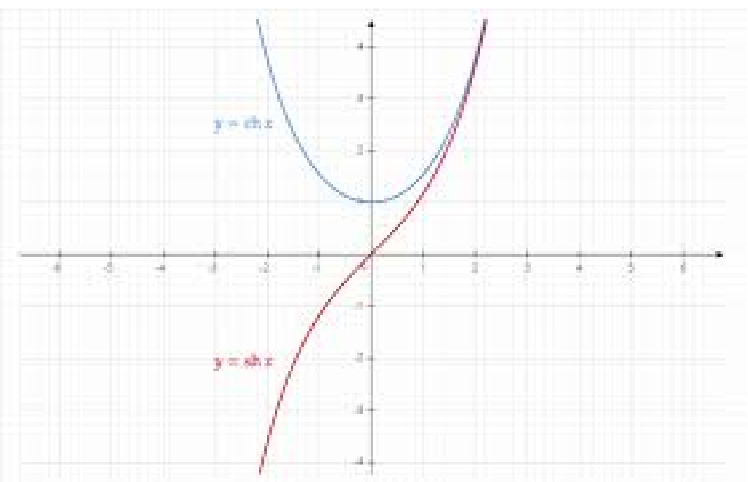
- en utilisant que la partie réelle de la dérivée d'une fonction complexe est la dérivée de la partie réelle càd $\Re e(f') = \left(\Re e(f)\right)'$

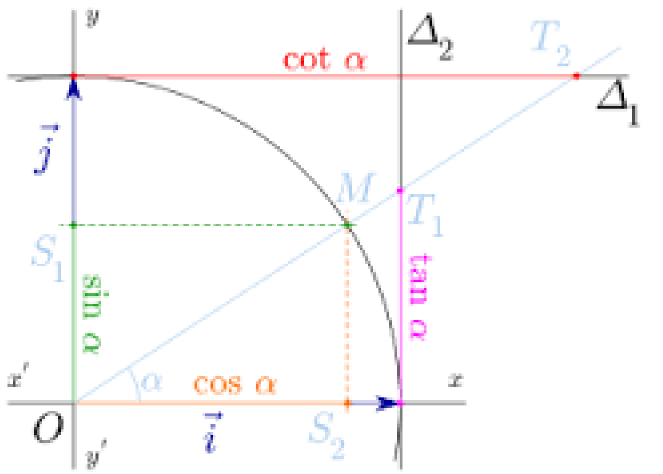
$$\cos^{(n)}(x) = \left(\Re e(e^{ix})\right)^{(n)} = \Re e\left((e^{ix})^{(n)}\right) = \Re e\left(i^n e^{ix}\right) = \Re e\left((e^{i\frac{\pi}{2}})^n e^{ix}\right) = \Re e\left(e^{in\frac{\pi}{2}}e^{ix}\right) = \Re\left(e^{i(x+n\frac{\pi}{2})}\right) = \cos\left(x + n\tfrac{\pi}{2}\right)$$

- en utilisant que la technique de l'angle moitié en p et q soit $\dfrac{p+q}{2}$

$$\cos(p) - \cos(q) = \Re e\left(e^{ip} - e^{iq}\right) = \Re e\left(e^{i\frac{p+q}{2}}\left(e^{ip - i\frac{p+q}{2}} - e^{iq - i\frac{p+q}{2}}\right)\right) = \Re e\left(e^{i\frac{p+q}{2}}\left(e^{i\frac{p-q}{2}} - e^{-i\frac{p-q}{2}}\right)\right) = \Re e\left(e^{i\frac{p+q}{2}}\left(2i \sin\frac{p-q}{2}\right)\right)$$

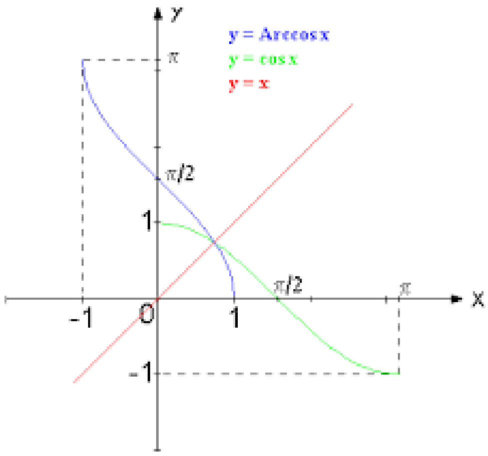
d'où, puisque $2\sin\dfrac{p-q}{2} \in \mathbb{R}$: $\cos(p) - \cos(q) = 2\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\Re e\left(\left(\cos\frac{p+q}{2} + i \sin\frac{p+q}{2}\right) \times i\right) = 2\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right) \times -\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$

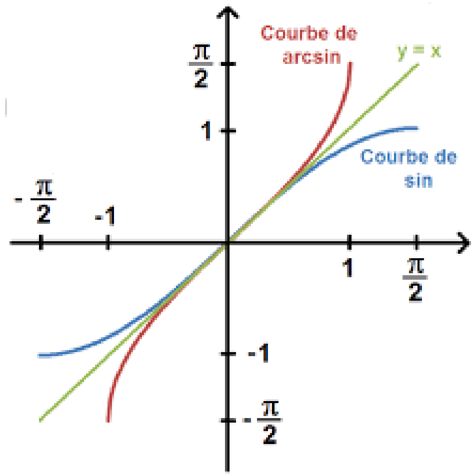




- Connaissances sur la fonction Arcsin et Arccos

Arcsin est définie et C^0 sur $[-1,1]$ à valeurs dans $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (c'est la réciproque de la restriction de sin sur I)
Arccos est définie et C^0 sur $[-1,1]$ à valeurs dans $I = [0,\pi]$ (c'est la réciproque de la restriction de sin sur I)
Arcsin est impaire et strictement croissante.
Arccos n'est pas paire (mais $\text{Arccos}(-x) + \text{Arccos}(x) = \pi$) et strictement décroissante.
Elles sont dérivable (et même C^∞) sur $]-1,1[$ et : $\text{Arcsin}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\text{Arccos}'(x)$
<u>À la demande</u> : On obtient des DL(0) par intégration des dérivées (Attention : $\text{Arccos}(0) = \frac{\pi}{2} \neq 0$)



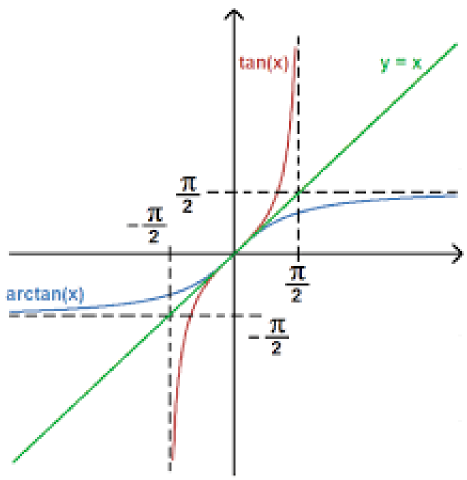


- Connaissances sur la fonction tan

tan est définie pour $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ (zéros de cosinus à exclure) par : $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ Elle est impaire et π périodique.
Elle est C^∞ sur son domaine de définition et : $\tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ et réalise donc une bijection (strictement croissante) de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$. Valeurs remarquables : $\tan(0) = 0$, $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, $\tan\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
Au voisinage de 0 : $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ (terme suivant à obtenir en intégrant la dérivée)
<u>À la demande</u> : Formule de trigonométrie $\tan(a \pm b) = \dfrac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$ sous réserve de sens

- Connaissances sur la fonction sur la fonction Arctan

Arctan est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (c'est la bijection réciproque de la restriction de tan sur I)
Elle est impaire et strictement croissante avec $\text{Arctan}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \text{Arctan}\, x = \frac{\pi}{2}$
Pour $x \neq 0$: $\text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, \dfrac{1}{x} = \text{signe}(x)\dfrac{\pi}{2}$
Au voisinage de 0, le DL de Arctan x s'obtient en intégrant celui de sa dérivée :
$\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}) \Rightarrow \text{Arctan}\, x = \underbrace{\text{Arctan}\, 0}_{=0} + x - \dfrac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$



2. Développements limités — Pouvoir énoncé un ou des développements limités usuels

- DL dont on doit pouvoir donner le développement immédiatement

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+o(x^n) \qquad \ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n) \qquad \tan x = x+\frac{x^3}{3}+o(x^4)$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1}) \qquad \sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{ch} x = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1}) \qquad \operatorname{sh} x = x+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n+o(x^n)$$

- DL dont qu'on doit rapidement retrouver

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n) \quad \text{et} \quad \ln(1-x) = -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4+\cdots+(-1)^n x^{2n}+o(x^{2n+1}) \Rightarrow \operatorname{Arctan} x = 0+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+2})$$

Arcsin x en intégrant un DL de $\operatorname{Arcsin}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

Arccos x en intégrant un DL de $\operatorname{Arccos}'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ **Attention !** $\operatorname{Arccos} 0 = \dfrac{\pi}{2} \neq 0$

$\tan x$ à un ordre supérieur : avec un DL_n, on a un DL_{n+1} de $\tan^2 x$ (car $\tan x \sim x$) donc un DL_{n+1} de $\tan'(x) = 1+\tan^2 x$ qui, par intégration, donne un DL_{n+2} de $\tan x$

3. Equations différentielles linéaires d'ordre 2/ Suite récurrente linéaire d'ordre 2

Pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
l'équation différentielle $ay''+by'+cy=0$ et la relation de récurrence linéaire $\forall n \in \mathbb{N},\ au_{n+2}+bu_{n+1}+cu_n=0$
possède la même **équation caractéristique** $ar^2+br+c=0$ dont on notera Δ le discriminant.
L'ensemble des solutions est toujours un sous-espace vectoriel de dimension 2 dont on connaît une base.
L'expression de la solution est ainsi exprimée à l'aide de deux constantes réelles A et B par :

Si l'équation caractéristique possède	l'expression de $y(t)$ est	l'expression de u_n est
2 racines distinctes r_1 et r_2 $(\Delta>0)$	$y(t) = \mathrm{A}e^{r_1 t}+\mathrm{B}e^{r_2 t}$	$u_n = \mathrm{A}r_1^n+\mathrm{B}r_2^n$
L'ensemble de solutions est	$\mathscr{S} = \mathrm{Vect}(f,g)$ dans $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ où $f : t \mapsto e^{r_1 t}$ et $g : t \mapsto e^{r_2 t}$	$\mathscr{S} = \mathrm{Vect}(a,b)$ dans $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ où $a = (r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $b = (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$
1 racine double r_0 $(\Delta=0)$	$y(t) = \mathrm{A}te^{r_0 t}+\mathrm{B}e^{r_0 t} = (\mathrm{A}t+\mathrm{B})e^{r_0 t}$	$u_n = \mathrm{A}nr_0^n+\mathrm{B}r_0^n = (\mathrm{A}n+\mathrm{B})r_0^n$
L'ensemble de solutions est	$\mathscr{S} = \mathrm{Vect}(f,g)$ dans $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ où $f : t \mapsto te^{r_0 t}$ et $g : t \mapsto e^{r_0 t}$	$\mathscr{S} = \mathrm{Vect}(a,b)$ dans $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ où $a = (nr_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $b = (r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$
2 racines complexes conjuguées $r_\pm$	$y(t) = e^{\alpha t}\big(\mathrm{A}\cos(\omega t)+\mathrm{B}\sin(\omega t)\big)$ où $r_\pm = \alpha \pm i\omega$ (forme algébrique)	$u_n = \rho^n\big(\mathrm{A}\cos(n\theta)+\mathrm{B}\sin(n\theta)\big)$ où $r_\pm = \rho e^{\pm i\theta}$ (forme exponentielle)
L'ensemble de solutions est	$\mathscr{S} = \mathrm{Vect}(f,g)$ dans $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ où $f : t \mapsto e^{\alpha t}\cos(\omega t)$ et $g : t \mapsto e^{\alpha t}\sin(\omega t)$	$\mathscr{S} = \mathrm{Vect}(a,b)$ dans $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ où $a = (\rho^n\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ et $b = (\rho^n\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$

Des petits trucs pour mémoriser :

- L'équation caractéristique réunit des conditions à vérifier pour que des vecteurs bien connus soient solutions

les fonctions exponentielle $y = [t \mapsto e^{rt}]$ où / les suites géométriques $u = (r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ où

$ay''(t)+by'(t)+cy(t) = (ar^2+br+c)e^{rt}$ / $au_{n+2}+bu_{n+1}+cu_n = (ar^2+br+c)r^n$

- Dans le cas des racines complexes conjuguées, l'expression est la partie réelle de la solution complexe

$y(t) = \Re e\Big(\lambda e^{r_+ t}+\mu e^{r_- t}\Big)$ / $u_n = \Re e\Big(\lambda r_+^n+\mu r_-^n\Big)$ avec $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}$

On utilise donc pour l'écriture des racines complexes conjuguées la forme la plus "efficace" :

$e^{r_\pm t} = e^{(\alpha\pm i\omega)t} = e^{\alpha t}e^{\pm i\omega t}$ / $(r_\pm)^n = \left(\rho e^{\pm i\theta}\right)^n = \rho^n e^{\pm in\theta}$