Questions de cours possibles sur la semaine n° 23

On pourra interroger sur **les points 2 (extrema), 3 (isométrie du plan et de l'espace) et 4 (matrice symétriques et coniques) des questions de cours de la semaine n°22**.

A la place des séries entières, on pourra interroger sur :

Questions de cours possibles (en plus) sur la semaine n° 23

1. Intégrales à paramètres

- Théorème de continuité d'une intégrale à paramètre.

Soit A et I des intervalles de $\mathbb{R}$ et $\left[f : \mathrm{A}\times\mathrm{I}\to\mathbb{K}\right]$ où $\mathbb{K}$ vaut $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,

la fonction $\left[\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_{\mathrm{I}} f(x,t)\,\mathrm{d}t\right]$ est continue sur l'intervalle A lorsque

i. pour tout $x\in\mathrm{A}$, la fonction $[t\mapsto f(x,t)]$ est continue sur I

ii. pour tout $t\in\mathrm{I}$, la fonction $[x\mapsto f(x,t)]$ est continue sur A

iii. il existe une fonction φ continue, positive et intégrable sur I telle que : $\forall (x,t)\in\mathrm{A}\times\mathrm{I},\ |f(x,t)|\leqslant\varphi(t)$
(hypothèse de domination)

Idées à retenir :
- on peut obtenir, en général, les hypothèses i. et ii. en établissant la continuité de la fonction de deux variables f (qui entraîne celle des applications partielles).
- on peut utiliser une domination locale (guidée le plus souvent par le sujet) du type :
$[0,+\infty[=\bigcup\limits_{\mathrm{A}>0}[0,\mathrm{A}]$ où l'expression de la dominante $\varphi(t)$ peut dépendre de A
$]0,+\infty[=\bigcup\limits_{0<\varepsilon<\mathrm{A}}[\varepsilon,\mathrm{A}]=\bigcup\limits_{\mathrm{A}>0}[\varepsilon,+\infty[$ où l'expression de la dominante $\varphi(t)$ peut dépendre de ε et de A

- Théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre.

Soit A et I des intervalles de $\mathbb{R}$ et $\left[f : \mathrm{A}\times\mathrm{I}\to\mathbb{K}\right]$ où $\mathbb{K}$ vaut $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,

la fonction $\left[\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_{\mathrm{I}} f(x,t)\,\mathrm{d}t\right]$ est de classe C^1 sur l'intervalle A avec $\forall x\in\mathrm{A},\quad \mathrm{F}'(x)=\displaystyle\int_{\mathrm{I}}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$ lorsque

i. pour tout $x\in\mathrm{A}$, la fonction $[t\mapsto f(x,t)]$ est intégrable sur I

ii. pour tout $t\in\mathrm{I}$, la fonction $[x\mapsto f(x,t)]$ est de classe C^1 sur A

iii. pour tout $x\in\mathrm{A}$, la fonction $\left[t\mapsto\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right]$ est continue sur I

iv. il existe une fonction φ continue, positive et intégrable sur I telle que : $\forall (x,t)\in\mathrm{A}\times\mathrm{I},\quad\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant\varphi(t)$
(hypothèse de domination)

Idées à retenir :
- l'hypothèse i. s'obtient en général lorsqu'on étudie la définition de l'intégrale. Attention, on veut de l'intégrabilité et pas seulement la convergence de l'intégrale. Rappel : g est intégrable sur I $\Leftrightarrow$ g est continue sur J et $\displaystyle\int_{\mathrm{J}}|g(t)|\,\mathrm{d}t$ converge
- on peut obtenir, en général, les hypothèses ii. et iii. en établissant que la fonction de deux variables f est de classe C^1 ce qui entraîne que les applications partielles (d'une variable) sont aussi de classe C^1 (Attention au sens de C^1 qui n'est pas le même pour les fonctions de 2 variables ou d'une variables)
- on peut utiliser une domination locale (guidée le plus souvent par le sujet) du type :
$[0,+\infty[=\bigcup\limits_{\mathrm{A}>0}[0,\mathrm{A}]$ où l'expression de la dominante $\varphi(t)$ peut dépendre de A
$]0,+\infty[=\bigcup\limits_{0<\varepsilon<\mathrm{A}}[\varepsilon,\mathrm{A}]=\bigcup\limits_{\mathrm{A}>0}[\varepsilon,+\infty[$ où l'expression de la dominante $\varphi(t)$ peut dépendre de ε et de A

• Pour obtenir le caractère C^∞, on utilise, en général, une démonstration par récurrence et on applique le théorème de dérivation pour prouver l'hérédité.