Questions de cours possibles sur les semaines n° 21 et 22

1. Théorème généraux sur les séries entières

- Lemme d'Abel, rayon de convergence et domaine de convergence d'une série entière

Étant donnée une série entière $\sum a_n z^n$,
si la suite $(a_n z_0^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée pour un $z_0 \in \mathbb{C}^*$ (par exemple parce que $a_n z_0^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ou parce que $\sum a_n z_0^n$ CV)
alors la série $\sum a_n z^n$ CVA pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < |z_0|$

Le rayon de convergence est $\quad \mathrm{R} = \sup\left\{r \geqslant 0 \,|\, (a_n r^n)_{n\geqslant 0} \text{ est bornée }\right\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

Le domaine de convergence de la série entière est un disque ouvert de rayon R à l'intérieur duquel il y a CVA, à l'extérieur duquel il y a DVG. Sur le cercle, on ne peut rien conclure.

- Utilisation de la règle de d'Alembert pour les séries entières

Étant donnée deux séries entières $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R, on sait que
— si z_0 est un complexe avec $\sum a_n z_0^n$ CV alors $\mathrm{R} \geqslant |z_0|$
— si z_0 est un complexe avec $\sum a_n z_0^n$ DV alors $\mathrm{R} \leqslant |z_0|$
On combine ces résultats aux conclusions de la règle de d'Alembert à deux termes consécutifs u_n et u_{n+1} de $\sum a_n z^n$:

$$\text{si } \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \text{ alors } \begin{cases} \text{si } \ell < 1, \text{ la série CVA et on obtient, en général, une minoration de R} \\ \text{si } \ell > 1, \text{ la série DVG et on obtient, en générale, une majoration de R} \end{cases}$$

Attention au série entière lacunaire par exemple :
si $\sum a_n z^n = \sum a_{2n} z^{2n}$, on a $\quad u_n = a_{2n} z^{2n} \quad$ et $\quad u_{n+1} = a_{2n+2} z^{2n+2}$
si $\sum a_n z^n = \sum a_{2n+1} z^{2n+1}$, on a $\quad u_n = a_{2n+1} z^{2n+1} \quad$ et $\quad u_{n+1} = a_{2n+3} z^{2n+3}$

- Propriétés de comparaison des rayons de convergence entre deux séries entières

Étant donnée deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayon de convergence R_a et R_b,
— si $|a_n| \leqslant |b_n|$ alors $\mathrm{R}_a \geqslant \mathrm{R}_b$
— si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$ (donc aussi si $a_n = o(b_n)$) alors $\mathrm{R}_a \geqslant \mathrm{R}_b$
— si $|a_n| \sim |b_n|$ alors $\mathrm{R}_a = \mathrm{R}_b$
— $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} n a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n} z^n$ ont le même rayon de convergence
— Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum n^\alpha z^n$ a un rayon de convergence égale à 1

- Somme de deux séries entières

Étant donnée deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayon de convergence R_a et R_b, alors
$\sum (a_n + b_n) z^n$ est une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} \geqslant \min(\mathrm{R}_a, \mathrm{R}_b)$ avec égalité si $\mathrm{R}_a \neq \mathrm{R}_b$

- Produit de Cauchy de deux séries entières

Étant donnée deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayon de convergence R_a et R_b, alors
le produit de Cauchy de ces séries entières est aussi une série entière $\sum c_n z^n$ où $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$
avec un rayon de convergence $\mathrm{R} \geqslant \min(\mathrm{R}_a, \mathrm{R}_b)$ et, si $|z| < min(\mathrm{R}_a, \mathrm{R}_b)$: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$

- Fonction somme d'une série entière et résultat de continuité.

Étant donnée une série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ réelle de rayon de convergence R, la fonction somme est l'application $\left[f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right]$ qui est définie au minimum sur l'intervalle ouvert $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$ et au mieux sur l'intervalle fermé $[-\mathrm{R}, \mathrm{R}]$.
Son domaine de définition est donc l'un des 4 intervalles $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$, $[-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$, $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}]$ ou $[-\mathrm{R}, \mathrm{R}]$.
On sait que la fonction somme est continue sur son domaine de définition.

- Dérivation terme à terme d'une série entière

Étant donnée une série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ réelle de rayon de convergence R,
- la série entière dérivée terme à terme $\sum\limits_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1}$ a le même rayon de convergence R et ce rayon est commun à toutes les séries entières dérivée terme à terme suivante
- la somme $\left[f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right]$ est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$
- pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(x)$ est la somme de la série entière où on a dérivé k fois terme à terme

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k} n(n-1)\dots(n-(k-1)) a_n x^{n-k} \text{ pour } x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[\qquad \text{de sorte que} \quad a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

- Théorème d'intégration termes à termes des séries entières

Étant donnée une série entière $\sum a_n x^n$ réelle de rayon de convergence R et de somme $\left[f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right]$

- la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ dite intégrée terme à terme a le même rayon de convergence R

- on obtient une primitive F de f par : $\forall x \in]-\mathrm{R},\mathrm{R}[,\ \mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$

- si $[a,b] \subset]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$: $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b a_n t^n \mathrm{d}t\right)$

- Fonction développable en série entière au voisinage de 0 et conditions nécessaires associées.

Une fonction f est développable en série entière sur $]-r,r[$ où $r>0$ s'il existe une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $\mathrm{R} \geqslant r$ telle que : $\forall x \in]-r,r[,\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

Si f est développable en série entière au voisinage de 0 alors
- f est C^∞ au voisinage de 0
- la série de Taylor $\sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ a un rayon de convergence $\mathrm{R}>0$ (unique développement possible pour f)

Attention! Ces conditions nécessaires ne sont pas suffisantes Contre-ex : $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et $f(0)=0$

- Unicité du développement en série entière.

Si deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont leurs sommes qui coïncident sur un domaine $]-\varepsilon,\varepsilon[$ où $\varepsilon>0$ alors elles sont égales : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n$

2. Extrema pour les fonctions de deux variables

- Formule de Taylor-Young pour une fonction de deux variables. Matrice Hessienne.

Si f est de classe C^2 sur un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$, la formule de Taylor-Young assure au point $(a,b)\in\mathscr{U}$ que :

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$
$$+\frac{1}{2}\underbrace{\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right)}_{=\mathrm{X}^\mathrm{T}\mathrm{HX}} + \overbrace{(h^2+k^2)\varepsilon(h,k)}^{=o\left(\|(h,k)\|^2\right)} \quad \text{où} \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$$

où $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ et $\mathrm{H} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ est la matrice Hessienne de f en (a,b) : $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b),\ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$ et $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)$

- Condition nécessaire et condition suffisante pour la présence d'un extremum local

/ Condition nécessaire associée à la présence d'un extremum local :

un extremum local est atteint en un point critique de f i.e. $(a,b)\in\mathscr{U}$ avec $\overrightarrow{grad} f(a,b) = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$

2/ Condition suffisante associée à la présence d'un extremum local par réduction de la matrice Hessienne :

La formule de Taylor-Young assure au point critique (a,b) que :

$$\mathrm{Q}(h,k) = f(a+h,b+k) - f(a,b) = \overbrace{h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}^{=0 \text{ car } \overrightarrow{grad} f(a,b)=\vec{0}} + \frac{1}{2}\mathrm{X}^\mathrm{T}\mathrm{HX} + o\left(\|(h,k)\|^2\right) \quad \text{a donc le signe de} \quad \mathrm{X}^\mathrm{T}\mathrm{HX}$$

où $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ et $\mathrm{H} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ est la matrice Hessienne de f en (a,b) : $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b),\ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$ et $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)$

Il y a un extremum (local) en (a,b) seulement si le signe de $\mathrm{Q}(h,k) = f(a+h,b+k) - f(a,b)$ reste constant (localement).

Le théorème spectral assure que : $\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2, \exists \mathrm{P}\in\mathrm{O}_2(\mathbb{R}),\ \mathrm{P}^\mathrm{T}\mathrm{HP} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ de sorte que $\mathrm{X}^\mathrm{T}\mathrm{HX} = \lambda(h')^2 + \mu(k')^2$

où λ et μ sont les valeurs propres et $\begin{pmatrix} h' \\ k' \end{pmatrix}$ les coordonnées dans la base orthonormée formée par les vecteurs propres de H.

On peut conclure si on connaît le signe des valeurs propres ce qu'on peut obtenir à l'aide de $\det \mathrm{H}$ et $\mathrm{Tr}(\mathrm{H})$

Nature d'un point critique à l'aide de $\det \mathrm{H}$ et $\mathrm{Tr}(\mathrm{H})$

Si $\begin{cases} \lambda>0 \\ \mu>0 \end{cases}$, il y a un minimum local. (càd $\det \mathrm{H} = \lambda\mu > 0$ et $\mathrm{Tr}(\mathrm{H}) = \lambda+\mu>0$)

Si $\begin{cases} \lambda<0 \\ \mu<0 \end{cases}$, il y a un maximum local. (càd $\det \mathrm{H} = \lambda\mu > 0$ et $\mathrm{Tr}(\mathrm{H}) = \lambda+\mu<0$)

Si $\lambda\mu<0$, $\begin{cases} \text{ni maximum} \\ \text{ni minimum} \end{cases}$ (point col) (càd $\det \mathrm{H} = \lambda\mu < 0$)

Remarque : Lorsque $\det \mathrm{H} = 0$, on ne peut rien conclure, toutes les situations restent possibles

3/ Extremum local ou global Il s'agit d'étudier le signe de $\quad Q(h,k) = f(a+h,b+k) - f(a,b)$
Pour nier la présence d'un extremum global, on montre que $Q(h,k)$ change de signe dans deux directions privilégiées (type $(h,0)$, $(0,k)$, (h,h), $(h,-h)$, etc) en utilisant un équivalent lorsque h (ou k) s'éloigne à l'infini

Pour prouver la présence d'un extremum global, on montrer que $Q(h,k)$ garde un signe constant sur tout l'ouvert $\mathscr{U}$ ce qu'on obtient en faisant, par exemple, apparaître des carrés à l'aide d'identité remarquables.

4/ Présence d'un bord Lorsqu'on recherche les extrema sur un domaine qui n'est pas ouvert, ceux-ci ne sont pas forcément atteints en des points critiques. On possède un résultat assurant l'existence d'extrema :

« Si $[f : (x,y) \mapsto f(x,y)]$ est une fonction à valeurs réelles continue sur domaine D fermé et borné alors f atteint un minimum et un maximum sur D »

On commence alors par rechercher les extrema sur l'ouvert défini par l'intérieur de D suivant la technique précédente et on compare ces valeurs avec celles des extrema sur les bords qu'on obtient en général en étudiant des fonction d'une seule variable (l'une des variables est fixé pour un bord parallèle à un axe par exemple).

3. Isométries du plan et de l'espace - Matrices orthogonales de $O_2(\mathbb{R})$ et $O_3(\mathbb{R})$

- Isométrie d'un espace euclidien de dimension 2

Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien $(E, \langle .,. \rangle)$ de dimension 2
associé à la matrice $\quad A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in M_2(\mathbb{R}) \quad$ où $\mathscr{B}$ est une BON de E

– f est une isométrie du plan E $\Leftrightarrow A \in O_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow$ les colonnes C_1 et C_2 de A forme une BON de $\mathbb{R}^2$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_1.C_2 = 0 \\ C_1.C_1 = 1 = C_2.C_2 \end{array} \right. \quad \text{où } x.y \text{ est le produit scalaire usuel de } \mathbb{R}^2$$

– Si f est une isométrie du plan E, il y a alors deux possibilités (isométrie directe ou indirecte) :

soit $\quad \det A = 1 \Leftrightarrow A \in SO_2(\mathbb{R}) \quad$ et f est une rotation vectorielle d'angle θ qu'on identifie car $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

soit $\quad \det A = -1 \quad$ et f est une réflexion de E d'axe $D = \mathrm{Ker}\,(f - id)$

- Isométrie d'un espace euclidien de dimension 3

Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien $(E, \langle .,. \rangle)$ de dimension 3
associé à la matrice $\quad A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in M_3(\mathbb{R}) \quad$ où $\mathscr{B}$ est une BON directe de E

– f est une isométrie $\Leftrightarrow A \in O_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow$ les colonnes (C_1, C_2, C_3) de A forment une BON de $\mathbb{R}^3$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_1.C_2 = 0 \\ C_1.C_1 = 1 = C_2.C_2 \end{array} \right. \quad \text{et } C_1 \wedge C_2 = \pm C_3 \quad \text{où } x.y \text{ est le produit scalaire usuel de } \mathbb{R}^3$$

– Si f est une isométrie de l'espace E de dimension 3, il y a alors deux possibilités (isométrie directe ou indirecte) :

soit $\ A \in SO_3(\mathbb{R})$ (lorsque $\left\{ \begin{array}{l} C_1.C_2 = 0 \\ C_1.C_1 = 1 = C_2.C_2 \end{array} \right.$ et $C_1 \wedge C_2 = +C_3$) alors $\quad f$ est une rotation vectorielle.

Elle est caractérisée dans l'espace E par un axe D et un angle θ.
Son axe est l'ensemble des vecteurs invariants soit $\quad D = \mathrm{Ker}\,(f - id) = \mathrm{Vect}(u)$ avec $\|u\| = 1$
Son angle θ s'obtient via la valeur de $\cos\theta$ et le signe de $\sin\theta$ sachant : $\quad \mathrm{Tr}(A) = 2\cos\theta + 1$
et, si $v \in D^{\perp}$ avec $\|v\| = 1$ alors $\quad \langle v, f(v) \rangle = \cos\theta \quad$ et $\quad v \wedge f(v) = (\sin\theta)u$

La BON directe $\mathscr{B}' = (u, v, u \wedge v)$ est adaptée à $E = D \oplus D^{\perp}$ avec : $\mathrm{Mat}'_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Remarque : $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ étant des BON, la matrice de passage $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \in O_3(\mathbb{R})$ d'où $P^{-1} = P^T$

soit $\ $ Soit $A \in O_3(\mathbb{R}) - SO_3(\mathbb{R})$ (lorsque $\left\{ \begin{array}{l} C_1.C_2 = 0 \\ C_1.C_1 = 1 = C_2.C_2 \end{array} \right.$ et $C_1 \wedge C_2 = -C_3$) alors

f est la composée d'une rotation vectorielle r et d'une réflexion s

La rotation r est caractérisée par un axe D et un angle θ et la réflexion s par son plan de réflexion $D^{\perp}$.
L'axe de r est l'ensemble des vecteurs envoyés sur leurs opposés soit $\quad D = \mathrm{Ker}\,(f + id) = \mathrm{Vect}(u)$ avec $\|u\| = 1$.
La réflexion s est celle par rapport à $D^{\perp}$ dont on détermine une équation à l'aide du vecteur normal $\vec{u}$.
On trouve l'angle θ via $\cos\theta$ et le signe de $\sin\theta$ sachant : $\quad \mathrm{Tr}(A) = 2\cos\theta - 1$
et, si $v \in D^{\perp}$ avec $\|v\| = 1$ alors $\quad \langle v, f(v) \rangle = \cos\theta \quad$ et $\quad v \wedge f(v) = (\sin\theta)u$

La BON directe $\mathscr{B}' = (u, v, u \wedge v)$ est adaptée à $E = D \oplus D^{\perp}$ et : $\mathrm{Mat}'_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Remarque 1 : si $\theta \equiv 0[2\pi]$, $r = id_{\mathbb{R}^3}$ et $f = s$ est une réflexion par rapport à $D^{\perp}$
Remarque 2 : $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ étant des BON, la matrice de passage $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \in O_3(\mathbb{R})$ d'où $P^{-1} = P^T$

Normalement, l'étude d'une isométrie indirecte qui ne serait pas une réflexion doit être guidée.

4. $\boxed{\text{Matrice symétrique et applications}}$

- Connaissances sur les matrices symétriques réelles

Une matrice est symétrique est une matrice A avec $A^T = A$ soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{K})$ avec : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{ij} = a_{ji}$

L'ensemble $S_n(\mathbb{R})$ des matrices réelles est un sev de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$ dont une base naturelle est construite à l'aide des matrices de la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$ part $\left(\left(E_{ii}\right)_{1 \leqslant i \leqslant n} \cup \left(E_{ij} + E_{ji}\right)_{1 \leqslant i < j \leqslant n}\right)$ contenant bien $n + \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$ vecteurs

Dans l'espace euclidien $M_n(\mathbb{R})$ munit du produit scalaire usuel :

$S_n(\mathbb{R}))^{\perp} = A_n(\mathbb{R})$ ensemble des matrices antisymétriques à coefficients réelles càd des matrices A avec $A^T = -A$

soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{R})$ avec : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{ij} = -a_{ji}$ (entraînant de fait : $a_{ii} = 0$)

Dans $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus^{\perp} A_n(\mathbb{R})$, on a : $\forall M \in M_n(\mathbb{R}),\quad M = \underbrace{\dfrac{M + M^T}{2}}_{=S \in S_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\dfrac{M - M^T}{2}}_{=A \in A_n(\mathbb{R})}$ ce qui permet de définir le projecteur orthogonal sur $S_n(\mathbb{R})$ et la symétrie associée.

- $\boxed{\text{Théorème spectral pour les matrices symétriques}}$

Une matrice symétrique réelle A est diagonalisable à valeurs propres réelles avec une matrice de passage orthogonale

$$\forall A \in S_n(\mathbb{R}), \exists P \in O_n(\mathbb{R}),\ D = P^T A P = P^{-1} A P \text{ est diagonale et réelle}$$

On dit que la matrice est orthogonalement diagonalisable

Cela signifie qu'il existe une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de A associés à des valeurs propres toutes réelles (base de diagonalisation) et la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à cette base donne la matrice orthogonale P de changement de bases.

- $\boxed{\text{Application du théorème spectral à la réduction des coniques}}$

Méthodologie pour décrire et représenter une conique d'équation $\quad ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad$ dans $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1/ <u>Rotation du repère pour éliminer le terme croisé de la partie quadratique $ax^2 + 2bxy + cy^2$</u> :

On a : $\quad ax^2 + 2bxy + cy^2 = X^T A X \quad$ où $\quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad$ et $\quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad$ est une matrice symétrique réelle.

On réduit la matrice symétrique réelle A dans une BOND ie on construit $P \in SO_2(\mathbb{R})$ telle que $P^T A P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$

Les réels λ et μ sont les valeurs propres de A vérifiant : $\begin{cases} \lambda + \mu = \mathrm{Tr}(A) \\ \lambda\mu = \det A \end{cases} \Leftrightarrow \lambda$ et μ racine de $\chi_A(x) = x^2 - \mathrm{Tr}(A)x + \det(A)$

$P = \mathrm{Mat}_{(\vec{\imath}, \vec{\jmath})}(\vec{u}, \vec{v}) \quad$ où $\begin{cases} \vec{u} \text{ est un vecteur propre de A associé à } \lambda \\ \vec{v} \text{ est un vecteur propre associé à } \mu \end{cases}$ et $(\vec{u}, \vec{v})$ BON directe de $\mathbb{R}^2$.

<u>Remarque</u> : Si $\lambda \neq \mu$, $E_\lambda = \mathrm{Ker}\ (A - \lambda I_2)$ et $E_\mu = \mathrm{Ker}\ (A - \mu I_2)$ sont des sev de dimension 1 avec $E_\mu = E_\lambda^{\perp}$

Par changement de bases : $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^T X \Leftrightarrow X = PX'$ et $P^T A P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ alors : $X^T A X = X'^T D X' = \lambda (x')^2 + \mu (y')^2$

2/ <u>Translation de l'origine pour éliminer la partie linéaire $dx + ey$</u> :

Le changement de bases précédents modifie la partie linéaire avec la relation $X = PX'$: $\quad dx + ey = \delta x' + \epsilon y'$

de sorte que la conique a pour équation dans $(O, \vec{u}, \vec{v})$: $\qquad \lambda (x')^2 + \mu (y')^2 + \delta x' + \epsilon y' + f = 0$

qu'on transforme en utilisant les identités remarquables pour retrouver une équation réduite de conique quitte à réaliser éventuellement un changement d'origine dans $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ avec Ω le centre ou le sommet de la conique.

<u>Conséquence</u> : $\boxed{\text{Classification des coniques}}$

— <u>Si $\det A = \lambda\mu > 0$</u> alors λ et μ non nuls de même signe (celui de $\mathrm{Tr}(A)$)
  La réduction aboutit à une équation dans $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ de la forme : $\quad \lambda X^2 + \mu Y^2 = k \Leftrightarrow |\lambda| X^2 + |\mu| Y^2 = \pm k$
  <u>C'est une conique du genre ellipse</u> éventuellement dégénérée en $\emptyset$ ou $\{\Omega\}$

— <u>Si $\det A = \lambda\mu < 0$</u> alors λ et μ non nuls de signes contraires
  La réduction aboutit à une équation dans $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ de la forme : $\quad \lambda X^2 + \mu Y^2 = k \Leftrightarrow |\lambda| X^2 - |\mu| Y^2 = \pm k$
  <u>C'est une conique du genre hyperbole</u> éventuellement dégénérée en deux droites sécantes

— <u>Si $\det A = \lambda\mu = 0$</u> alors λ ou μ est nulle
  La réduction aboutit à une équation dans $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ de la forme : $\quad X^2 = 2pY \quad$ ou $\quad Y^2 = 2pX$
  <u>C'est une conique du genre parabole</u> éventuellement dégénérée en l'ensemble vide, une droite ou en une réunion de 2 droites parallèles