Questions de cours possibles sur les semaines n° 19 et 20

1. Bilan Espace Préhilbertien et Euclidien

- Définition d'un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$espace vectoriel E et de la norme associée.

Un produit scalaire $\langle .,. \rangle$ sur E est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive

- $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle x,y \rangle$ existe et c'est un réel
- elle est symétrique : $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$
- elle est bilinéaire i.e. $[x \mapsto \langle x,y \rangle]$ (y fixé) et $[y \mapsto \langle x,y \rangle]$ (x fixé) sont dans $\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$
  Si on a prouvé la symétrie, il suffit de vérifier la linéarité d'une seule des application.
- elle est positive : $\forall x \in E,\ \langle x,x \rangle \geqslant 0$
- elle est définie : $\forall x \in E,\ \langle x,x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0_E$

La norme sur E associée à ce produit scalaire est donnée par : $\forall x \in E,\ \|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle}$
On a : $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ et $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$

- Les produits scalaires usuels *(qu'il faut savoir justifier éventuellement)*

- sur $\mathbb{R}^n$: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ où $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ et $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ tel que la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une BON
- sur $\mathbb{R}_n[X]$: $\langle P,Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ où $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ tel que la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est une BON
  mais aussi : $\langle P,Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(\alpha_k) Q(\alpha_k)$ où $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des réels 2 à 2 distincts
  Outil pour la preuve : un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ non nul a au plus n racines distinctes
- sur $M_n(\mathbb{R})$: $\langle A,B \rangle = \mathrm{tr}(A^T B) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} b_{ij}$ où $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ tel que la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$ est une BON Outil pour la preuve : propriété de la trace et transposition et définition du produit matriciel $[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$
- sur $C^0([a,b],\mathbb{R})$: $\langle f,g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$ Outil pour la preuve : propriétés de l'intégrale
  Si I est un intervalle quelconque, la convergence de l'intégrale $\langle f,g \rangle = \int_I f(t)g(t)\mathrm{d}t$ n'est pas assurée sur $C^0(I,\mathbb{R})$
  L'inégalité $|fg| \leqslant \frac{1}{2}(f^2+g^2) \Leftrightarrow (|f|-|g|)^2 \geqslant 0$ assure la convergence sur le sev des fonctions f avec f^2 intégrables sur I.
- sur $\mathbb{R}[X]$ (et donc aussi sur $\mathbb{R}[X]$: $\langle P,Q \rangle = \int_a^{a+\varepsilon} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ où $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$
  Outil pour la preuve : propriétés de l'intégrale + un polynôme qui a une infinité de racines distinctes est nul

- Identités du parallélogramme et identités de polarisation

La norme associée à un produit scalaire $\langle .,. \rangle$ sur E est définie par : $\forall x \in E,\ \|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle}$
On a : $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ et $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$

Identité du parallélogramme : $\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$

Identités de polarisation : $\forall (x,y) \in E^2,\ \langle x,y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$

- Inégalités triangulaire et Inégalité de Cauchy-Schwarz

Si $\|.\|$ est une norme associé à un produit scalaire $\langle .,. \rangle$ sur le $\mathbb{R}$ espace vectoriel E,

Inégalité triangulaire : $\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall (x,y) \in E^2,\ \left|\langle x,y \rangle\right| \leqslant \|x\| \|y\|$

Ces inégalités deviennent des égalités si et seulement si x et y sont colinéaires.

- Vécteurs orthogonaux, famille orthogonale et théorèmes de Pythagore

Si $\|.\|$ est une norme associé à un produit scalaire $\langle .,. \rangle$ sur le $\mathbb{R}$ espace vectoriel E,

Théorème de Pythagore : Pour $(x,y) \in E^2$, x et y sont orthogonaux ie $\langle x,y \rangle = 0 \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|x\|^2$

Théorème de Pythagore généralisé : Si $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une famille de vecteurs de E

Si $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une famille orthogonale ie $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow \langle e_i, e_j \rangle = 0$ alors $\|e_1 + e_2 + \cdots + e_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2$

- Connaissances sur l'orthogonal d'un sev? Cas particulier d'un sev de dimension finie. Cas d'un hyperplan dans un espace euclidien.

• Si E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel munit d'un produit scalaire $\langle .,.\rangle$ et si F est un sous-espace vectoriel (sev) de E

l'orthogonal $F^\perp$ de F est $F^\perp = \left\{x \in E \mid \forall y \in F,\ \langle x, y\rangle = 0\right\}$

C'est un sev de E qui vérifie : $F \cap F^\perp = \{0_E\}$ soit $F \oplus F^\perp \subset E$ et $F \subset (F^\perp)^\perp$

Et : $\{0_E\}^\perp = E$ (0_E est orthogonal à tous les vecteurs) et $E^\perp = \{0_E\}$ (un vecteur orthogonal à tous les vecteurs est nul)

• Si F est de dimension finie avec $F = \mathrm{Vect}\left((e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}\right)$ alors : $x \in F^\perp \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ \langle x, e_i\rangle = 0$ **Important en pratique!**

De plus : $F = (F^\perp)^\perp$ et $F \oplus F^\perp = E$ et on dit que $F^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de F dans $(E, \langle .,.\rangle)$

En particulier, si $\dim E < +\infty$, on a : $\dim(F^\perp) = \dim E - \dim F$

• En particulier, si F = H est un hyperplan de l'espace euclidien E alors $\dim H^\perp = 1$. Un vecteur qui engendre $H^\perp$ est appelé vecteur normal à H et, si on connaît H par une équation linéaire non triviale $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ dans une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E alors $H^\perp = \mathrm{Vect}(\vec{a})$ avec $\vec{a} = a_1e_n + \cdots + a_ne_n$ vecteur normal à H

- Familles orthogonales et indépendance linéaire. Sev orthogonaux éventuellement supplémentaires orthogonaux.

Si E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel munit d'un produit scalaire $\langle .,.\rangle$,

- une famille $(e_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E (I ensemble quelconque) est orthogonale lorsque : $\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \Rightarrow \langle e_i, e_j\rangle = 0$

  Une famille orthogonale est une famille libre de vecteurs de E

- les sev F et G sont orthogonaux si $\forall (f,g) \in F \times G,\ \langle f, g\rangle = 0$.

  Si F et G sont orthogonaux alors $F \cap G = \{0_E\}$ (la somme est directe)

  F et G sont des sev supplémentaires orthogonaux $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{F et G sont orthogonaux donc } F \oplus G \subset E \\ E \subset F + G \end{cases}$

  $\underset{\text{si } \dim E < +\infty}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{F et G sont orthogonaux donc } F \cap G = \{0_E\} \\ \dim F + \dim G = \dim E \end{cases}$

- Base orthonormée et calculs dans une base orthonormée.

• Une base orthonormée de E est une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E qui est une famille orthonormée càd une famille orthogonale de vecteurs unitaires autrement dit : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\quad \langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$

• Si E est un espace euclidien (càd $\dim E < +\infty$) et si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E alors :

- les coordonnées du vecteur x sont $\left(\langle e_i, x\rangle\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$ càd $x = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x\rangle\, e_i$

- si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de x et y, alors $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i = X^TY$ et $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

- si $f \in \mathscr{L}(E)$ alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \left(\langle e_i, f(e_j)\rangle\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$

- Algorithme de Gram-Schmidt

L'algorithme dit d'orthonormalisation de Gram-Schmidt permet de construire une famille orthonormale à partir d'une famille libre de vecteurs de E. Il permet donc de justifier l'existence des bases orthonormées dans un espace euclidien.

Énoncé du théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Il existe une unique famille orthonormée $(\varepsilon_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ construite à partir de la famille libre $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ telle que :

1) $\forall k \in [\![1,n]\!],\ \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ et 2) $\forall k \in [\![1,n]\!],\ \langle \varepsilon_k, e_k\rangle > 0$

Remarque : la condition 2 permet d'assurer l'unicité de la famille construite.

Mise en place de l'algorithme sur une famille libre $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$

• Etape n° 1 : $\varepsilon_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$

• Etape n° 2 : $\varepsilon_2 = \dfrac{u_2}{\|u_2\|}$ où $u_2 = e_2 - \langle e_2, \varepsilon_1\rangle\,\varepsilon_1$

• Etape n° 3 : $\varepsilon_3 = \dfrac{u_3}{\|u_3\|}$ où $u_3 = e_3 - \langle e_3, \varepsilon_1\rangle\,\varepsilon_1 - \langle e_3, \varepsilon_2\rangle\,\varepsilon_2$

• Etape n° k : Si $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k-1})$ est construit, on construit $\varepsilon_k = \dfrac{u_k}{\|u_k\|}$ où $u_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, \varepsilon_i\rangle\,\varepsilon_i$

Interprétation en terme de projection orthogonale : $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ est un hyperplan de $E = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k, e_{k+1})$

Si $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ est construit, puisque $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ alors $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ est une BON de F.

Puisque $F \oplus F^\perp = E$, $F^\perp$ est une droite vectorielle de E qui sera dirigée par le vecteur unitaire ε_{k+1}.

On sait trouver le projeté orthogonal $p(e_{k+1})$ de e_{k+1} sur F à l'aide de la base orthonormée : $p(e_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k} \langle e_{k+1}, \varepsilon_i\rangle\,\varepsilon_i$

Puisque e_{k+1} n'est pas dans F, le vecteur $u_{k+1} = e_{k+1} - p(e_{k+1})$ est dans $F^\perp$: il est donc colinéaire à ε_{k+1}.

Comme ce dernier est unitaire : $\varepsilon_{k+1} = \dfrac{u_{k+1}}{\|u_{k+1}\|}$ où $u_{k+1} = e_{k+1} - p(e_{k+1})$

- Projection orthogonale sur un sev de dimension finie dans un espace prehilbertien.

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien $(E,\langle .,.\rangle)$, on a $\quad F\oplus F^{\perp}=E \quad$ et le projecteur p_F sur F parallèlement à $F^{\perp}$ est appelé la projection orthogonale sur F.

On dispose de deux méthodes pour calculer un projeté orthogonal :

Méthode n° 1 Calcul du projeté orthogonal à l'aide d'une base orthonormée $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ de E

$$\text{Si } (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n) \text{ est une base orthonormée de F, on a : } \forall x\in E,\quad p_F(x)=\sum_{i=1}^{n}\langle x,\varepsilon_i\rangle\,\varepsilon_i$$

Cas particulier ou F = H hyperplan d'un espace euclidien E $\quad p_F(x)=x-p_{F^\perp}(x)$ où $p_{F^\perp}(x)$ est le projeté orthogonale de x sur $F^\perp$ qu'on calcule facilement : $p_{F^\perp}(x)=<x,\dfrac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}>\dfrac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$ où $\vec{n}$ est un vecteur non nul de $F^\perp$

Méthode n° 2 On utilise la caractérisation du projeté orthogonal : $\quad y=p_F(x)\Leftrightarrow y\in F \quad$ et $\quad x-y\in F^\perp$

Si $(f_1,\dots,f_n)$ est une base quelconque de F :

$p_F(x)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha f_i$ où on recherche les n scalaires inconnus $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ à l'aide d'un système linéaire :

$$\begin{cases}\langle x-p_F(x),f_1\rangle=0\\ \langle x-p_F(x),f_2\rangle=0\\ \vdots\\ \langle x-p_F(x),f_n\rangle=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\langle p_F(x),f_1\rangle=\langle x,f_1\rangle\\ \langle p_F(x),f_2\rangle=\langle x,f_2\rangle\\ \vdots\\ \langle p_F(x),f_n\rangle=\langle x,f_n\rangle\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1\langle f_1,f_1\rangle+\alpha_2\langle f_2,f_1\rangle+\cdots+\alpha_n\langle f_n,f_1\rangle=\langle x,f_1\rangle\\ \alpha_1\langle f_1,f_2\rangle+\alpha_2\langle f_2,f_2\rangle+\cdots+\alpha_n\langle f_n,f_2\rangle=\langle x,f_2\rangle\\ \vdots\\ \alpha_1\langle f_1,f_n\rangle+\alpha_2\langle f_2,f_n\rangle+\cdots+\alpha_n\langle f_n,f_n\rangle=\langle x,f_2\rangle=\langle x,f_n\rangle\end{cases}$$

- Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie dans un espace prehilbertien.

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien $(E,\langle .,.\rangle)$,
Pour tout $x\in E$, $\quad d(x,F)=\inf\left\{\|x-y\|\mid y\in F\right\}$ La projection orthogonale $p_F(x)$ sur F est l'unique vecteur de F qui minimise la distance de x à un vecteur de F autrement dit : $\quad d(x,F)=\|x-p_F(x)\|=\sqrt{\|x\|^2-\|p_F(x)\|^2}$

2. Développement en séries entières usuels

Les élèves peuvent utiliser directement, sans démonstration, les DSE suivant toutefois ils doivent pouvoir les démontrer en partant des développements de la série géométrique ou de l'exponentielle.

Formule du binôme généralisée avec un exposant $\alpha\in\mathbb{R}$

- $\boxed{(1+x)^\alpha=1+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n\quad\left(=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\dots\right)\quad\text{pour } |x|<1\ (R=1)}$

On obtient ce DSE en utilisant que $[f:x\mapsto(1+x)^\alpha]$ est l'unique solution sur $]-1,1[$ du problème de Cauchy $\begin{cases}y'=\alpha y\\ y(0)=1\end{cases}$

En effet : f est C^1 sur $]-1,+\infty[$ donc sur $]-1,1[$ et : $\quad f'(x)=\alpha(x+1)^{\alpha-1}$ d'où $(1+x)f'(x)=\alpha f(x)\quad$ de plus $\quad f(0)=(1+0)^\alpha=1^\alpha=1$

On cherche une solution DSE de $y'=\alpha y$ sous la forme $\quad y(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\quad$ avec un rayon de convergence $R>0$

Par dérivation terme à terme : $\quad y'(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}$

Sur $]-R,R[$: $\quad (1+x)y'(x)=\alpha y(x)\Leftrightarrow(1+x)\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}\right)=\alpha\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\right)\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha a_n)x^n$

On pose $k=n-1$ dans la première somme, $k=n$ dans les deux autres

$$\Leftrightarrow\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)a_{k+1}x^k+\sum_{k=\cancel{1}0}^{+\infty}ka_kx^k=\sum_{k=0}^{+\infty}(\alpha a_k)x^k$$

On regroupe toutes les sommes qui CVA

$$\Leftrightarrow\sum_{k=0}^{+\infty}\Big((k+1)a_{k+1}+ka_k\Big)x^k=\sum_{k=0}^{+\infty}(\alpha a_k)x^k$$

Par unicité du développement en série entière

$$\Leftrightarrow\forall k\in\mathbb{N},\ (k+1)a_{k+1}+ka_k=\alpha a_k\Leftrightarrow\forall k\in\mathbb{N},\ a_{k+1}=\frac{\alpha-k}{k+1}a_k$$

La suite (a_n) est totalement déterminé puisqu'on connaît $a_0=y(0)=1$ puis on calcule $a_1,a_2,\dots$ avec la relation de récurrence.

On peut vérifier que le rayon de convergence vérifie $R>0$ avec la règle de d'Alembert :

si $u_n=a_nx^n\neq0$ pour $x\neq0$ alors $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=\dfrac{|\alpha-n|}{n+1}|x|\sim_{n\to+\infty}\dfrac{n}{n}|x|=|x|\xrightarrow[n\to+\infty]{}|x|$

Si $|x|<1$, il y a CVA donc $R\geqslant1$. Si $|x|>1$, il y a DVG donc $R\leqslant1$. Ainsi : $R=1>0$

On peut expliciter le coefficient a_n en itérant la relation de récurrence pour $n\geqslant1$:

$$a_n=\frac{\alpha-(n-1)}{n}a_{n-1}=\frac{\alpha-(n-1)}{n}\times\frac{\alpha-(n-2)}{n-1}a_{n-2}=\frac{\alpha-(n-1)}{n}\times\frac{\alpha-(n-2)}{n-1}\times\cdots\times\frac{(\alpha-0)}{1}\underbrace{a_0}_{=1}=\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$$

en inversant l'ordre des termes du produit au numérateurs et car $n(n-1)\times\cdots\times1=n!$

Par unicité de la solution d'un produit de Cauchy : $\forall x\in]-1,1[,\ f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\Leftrightarrow(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$

Famille de la série géométrique

- $\boxed{\dfrac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty} z^n \quad \left(=1+z+z^2+\dots\right) \quad \text{pour } |z|<1 \text{ (R = 1)}}$

- $\boxed{\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} \quad \left(=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\dots\right) \quad \text{pour } |x|<1 \text{ (R = 1)}}$

Avec $x=-t$ dans $\dfrac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ et vu que $|-t|<1 \Leftrightarrow |t|<1$, on obtient : $\dfrac{1}{1+t}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n$ pour $|t|<1$

En intégrant terme à terme : $\ln(1+t)-\ln(1+0)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{t^{n+1}}{n+1}=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\dfrac{t^k}{k}$ pour $|t|<1$ en posant $k=n+1$

- $\boxed{\operatorname{Arctan}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \left(=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^7}{7}+\dots\right) \quad \text{pour } |x|<1 \text{ (R = 1)}}$

Avec $x=-t^2$ dans $\dfrac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ et vu que $|-t^2|<1 \Leftrightarrow t^2<1 \Leftrightarrow |t|<1$, on obtient : $\dfrac{1}{1+t^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{2n}$ pour $|t|<1$

En intégrant terme à terme : $\operatorname{Arctan}(t)-\operatorname{Arctan}(0)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{t^{2n+1}}{2n+1}$ pour $|t|<1$

Famille de la série exponentielle

- $\boxed{e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{z^n}{n!} \quad \left(=1+z+\dfrac{z^2}{2}+\dfrac{z^3}{3!}\dots\right) \quad \text{pour } z\in\mathbb{C} \text{ (R = }+\infty)}$

- $\boxed{\operatorname{ch}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \left(=1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{4!}\dots\right) \quad \text{pour } x\in\mathbb{R} \text{ (R = }+\infty)}$

Pour tout x réel : $\operatorname{ch}(x)=\dfrac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n x^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1+(-1)^n}{2}\dfrac{x^n}{n!}$ car toutes les séries CVA

Or : $\dfrac{1+(-1)^n}{2}=\begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est impair du type } n=2k+1 \\ 1 \text{ si } n \text{ est pair du type } n=2k \end{cases}$ donc : $\operatorname{ch}(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{x^{2k}}{(2k)!}$ pour tout x réel

- $\boxed{\operatorname{sh}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \left(=x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}\dots\right) \quad \text{pour } x\in\mathbb{R} \text{ (R = }+\infty)}$

Pour tout x réel : $\operatorname{sh}(x)=\dfrac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n!}-\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n x^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1-(-1)^n}{2}\dfrac{x^n}{n!}$ car toutes les séries CVA

Or : $\dfrac{1-(-1)^n}{2}=\begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est pair du type } n=2k \\ 1 \text{ si } n \text{ est impair du type } n=2k+ \end{cases}$ donc : $\operatorname{sh}(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{x^{2k+}}{(2k+)!}$ pour tout x réel

- $\boxed{\cos(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}\left(=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{4!}\dots\right) \quad \text{pour } x\in\mathbb{R} \text{ (R = }+\infty)}$

Pour tout x réel : $\cos(x)=\dfrac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}i^n\dfrac{x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n i^n x^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1+(-1)^n}{2}\times i^n\dfrac{x^n}{n!}$ car toutes les séries CVA

$\dfrac{1+(-1)^n}{2}=\begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est impair du type } n=2k+1 \\ 1 \text{ si } n \text{ est pair du type } n=2k \end{cases}$ donc : $\cos(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\underbrace{i^{2k}}_{=(i^2)^k=(-1)^k}\dfrac{x^{2k}}{(2k)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^k\dfrac{x^{2k}}{(2k)!}$ pour x réel

- $\boxed{\sin(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\left(=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{4!}\dots\right) \quad \text{pour } x\in\mathbb{R} \text{ (R = }+\infty)}$

Pour x réel : $\sin(x)=\dfrac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)=\dfrac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}i^n\dfrac{x^n}{n!}-\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n i^n x^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1-(-1)^n}{2}\times i^{n-1}\dfrac{x^n}{n!}$ car les séries CVA

$\dfrac{1-(-1)^n}{2}=\begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est pair du type } n=2k \\ 1 \text{ si } n \text{ est impair du type } n=2k+1 \end{cases}$ et : $\sin(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\underbrace{i^{2k}}_{=(i^2)^k=(-1)^k}\dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^k\dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ pour x réel