Questions de cours possibles sur les semaines n° 17 et 18

1. Bilan d'algèbre linéaire en PT

- Famille libre. Famille de polynômes non nuls de degrés distincts. Famille génératrice. Bases.

- Si $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une famille finie de vecteurs d'un $\mathbb{K}$ev E, on dit que c'est une famille libre si toute combinaison linéaire de cette famille qui est nulle est forcément triviale

$$\text{autrement dit que : } \forall(\alpha_k)_{k\in[\![0,n]\!]}\in\mathbb{K}^n,\ \sum_{k=0}^{n}\alpha_k x_k = 0_E \Rightarrow \alpha_0=\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0$$

- Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on dit qu'une famille $(P_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ de polynômes non nuls en degré 2 à 2 distincts est libre.
- Une famille $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est génératrice d'un $\mathbb{K}$ev E lorsque tout vecteur de E est une combinaison linéaire de cette famille

$$\text{autrement dit que : } \quad \forall x\in E, \exists(\alpha_k)_{k\in[\![0,n]\!]}\in\mathbb{K}^n,\ x=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k x_k \quad \text{et on note} \quad E=\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)$$

- Une base de E est une famille libre et génératrice de E : un vecteur de E s'écrit alors de manière unique comme une combinaison linéaire des vecteurs de la base et la famille des scalaires définissent les coordonnées du vecteur.

  Si $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ base de E alors : $\forall x\in E, \exists!(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in\mathbb{K}^n,\ x=\sum_{i=1}^{n}x_i e_i$ avec $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ colonne des coordonnées de x.

  Toutes les bases ont le même nombre de vecteurs qu'on appelle la dimension de E.

  Si on connaît la dimension et une base $\mathscr{B}_0$ de E , on peut caractériser les bases de plusieurs façons :

$$\mathscr{B} \text{ est une base de E} \Leftrightarrow \begin{cases}\mathscr{B} \text{ est libre}\\ \mathrm{Card}(\mathscr{B})=\dim E\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\mathscr{B} \text{ est génératrice}\\ \mathrm{Card}(\mathscr{B})=\dim E\end{cases} \Leftrightarrow \det_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B})\neq 0$$

- Connaissance sur les sommes (éventuellement directe) de sous-espace vectoriels. Cas particulier des sev supplémentaires.

- Si $E_1, E_2, \dots, E_p$ sont des sev d'un $\mathbb{K}$ev E, $\quad \sum_{i=1}^{p}E_i=\{x_1+\cdots+x_p \mid \forall i\in[\![1,p]\!], x_i\in E_i\}$ est un sev de E

On obtient une famille génératrice de $\sum_{i=1}^{p}E_i$ en réunissant des familles génératrices de chacun des E_i

$$\text{autrement dit} \quad \sum_{i=1}^{p}E_i=\mathrm{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{p}\mathscr{F}_i\right) \quad \text{si } \forall i\in[\![1,p]\!],\ E_i=\mathrm{Vect}(\mathscr{F}_i)$$

- On dit que la somme est directe et on note $\bigoplus_{i=1}^{p}E_i$ si et seulement si la seule décomposition de 0_E dans $\sum_{i=1}^{p}E_i$ est la décomposition triviale : $\forall(x_1,\dots,x_p)\in E_1\times\cdots\times E_p,\ x_1+\cdots+x_p=0_E\Rightarrow x_1=x_2=\cdots=x_p=0_E$

  On obtient une base de $\bigoplus_{i=1}^{p}E_i$ en réunissant des bases de chacun des E_i autrement dit,

  si $\mathscr{B}_i$ base de E_i, alors $\bigcup_{i=1}^{p}\mathscr{B}_i$ est une base de $\bigoplus_{i=1}^{p}E_i$ (dite base adaptée à la somme directe) et : $\dim\bigoplus_{i=1}^{p}E_i=\sum_{i=1}^{p}\dim E_i$

- Deux sev F et G sont supplémentaires dans E lorsque $F\oplus G=E$ càd $\begin{cases}F\cap G=\{0_E\}\\ F+G=E\end{cases}$

  Si $\dim E<+\infty$, on a plus simplement : $F\oplus G=E \Leftrightarrow \begin{cases}F\cap G=\{0_E\}\\ \dim F+\dim G=\dim E\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}F+G=E\\ \dim F+\dim G=\dim E\end{cases}$

- Étant donné un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E et F un sev de E, définir :

  1) F est un sev stable par l'endomorphisme u 2) F est stable par combinaison linéaire 3) u est linéaire

1) signifie : $u(F)\subset F$ soit $\forall x\in F, u(x)\in F$
2) signifie : $\forall(x,y)\in F^2, \forall\alpha\in\mathbb{K},\ \alpha x+y\in F$
3) signifie : $\forall(x,y)\in F^2, \forall\alpha\in\mathbb{K},\ u(\alpha x+y)=\alpha u(x)+u(y)$

- Connaissances sur les hyperplans

Un hyperplan H est un sev de E admettant une droite vectorielle pour supplémentaires : $E=H\oplus\mathrm{Vect}(a)$ où $a\in E-H$
Si $\dim E<+\infty$: H est un hyperplan $\Leftrightarrow \dim(H)=\dim E-1 \Leftrightarrow H=\{x_1e_1+\cdots+x_ne_n \mid a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0\}$
où $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E et $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{K}^n$ distinct de $0_{\mathbb{K}^n}$
Ainsi, en dim $<+\infty$, un hyperplan est caractérisé par une équation linéaire $a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0$ non triviale
(dite équation de l'hyperplan H et toutes les autres équations sont proportionnelles)

- Connaissances sur le déterminant

Pour A =∈ $M_n(\mathbb{K})$ det(A) se calcule de manière itérative par développement selon une ligne ou une colonne

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\Delta_{ij}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\Delta_{ij}$$ où Δ_{ij} est le déterminant obtenu en supprimant la ligne i et la colonne j de det(A)

-> On sait que : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$ et que, si A est triangulaire alors, det(A) est le produit des coefficients diagonaux.

Géométriquement :

- Dans $\mathbb{R}^2$, $\det(\vec{u},\vec{v})=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin(\vec{u},\vec{v})$ correspond à l'aire (algébrique) du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On sait que : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ⇔ $\det(\vec{u},\vec{v})=0$

- Dans $\mathbb{R}^2$, $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=(\vec{u}\wedge\vec{v}).\vec{w}$ correspond au volume (algébrique) du parallélépipède construit sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

On sait que : $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ⇔ $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est liée ⇔ $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=0$

-> On sait aussi que : $\det(AB)=\det(A)\det(B)$, $\det(A^T)=\det(A)$ et que : P est inversible ⇔ $\det(P)\neq 0$

-> Si $C_1,\dots,C_n$ (resp $L_1,\dots,L_n$) sont les colonnes (resp les lignes) de A alors

- det A est nulle si la famille des colonnes (resp des lignes) est liées (donc aussi dans le cas de 2 colonnes/lignes proportionnelles)
- on ne change pas le déterminant si on lui applique une opération $C_j\leftarrow C_j+\lambda C_i$ où $i\neq j$ (resp. $L_j\leftarrow L_j+\lambda C_i$)
- une opération $C_j\leftarrow C_i$ (resp $L_i\leftarrow L_j$) change le déterminant en son opposé

En pratique, on utilise ses opérations pour faire apparaître un maximum de 0 dans le déterminant avant de développer selon une ligne/une colonne

- Connaissances sur la trace

• Pour A ∈ $M_n(\mathbb{K})$, tr(A) est la somme des coefficients diagonaux de A. On sait que :

-> la trace est linéaire

-> Pour $(A,B)\in M_n(\mathbb{R})^2$, $\mathrm{tr}(A^T)=\mathrm{tr}(A)$ et $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$

-> Deux matrices semblables ont la même trace

• Si $f\in\mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$ev de dimension finie, $\mathrm{tr}(f)=\mathrm{tr}(A)$ où A est la matrice de f dans une base de E.

- Définitions : éléments propres d'un endomorphisme/une matrice.

• $\lambda\in\mathbb{K}$ une valeur propre de l'endomorphisme f du $\mathbb{K}$ev E ⇔ $\exists x\in E,\ x\neq 0$ et $f(x)=\lambda x$

⇔ $E_\lambda(f)=\mathrm{Ker}\,(f-\lambda id)\neq\{0\}$

$\Leftrightarrow_{\text{en } dim<+\infty}$ λ est racine de $\chi_f(x)=\det(xid-f)$

$E_\lambda(f)=\mathrm{Ker}\,(f-\lambda id)$ est le sev propre de f associé à λ : il contient les vecteurs propres associés à λ et 0_E.

L'ensemble des valeurs propres de f (càd les racines du polynômes caractéristiques χ_f) est le spectre de f (noté Sp(f))

• Les éléments propres d'une matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ sont ceux de l'endomorphisme canoniquement associé à A.

$\lambda\in\mathbb{K}$ une valeur propre de A ∈ $M_n(\mathbb{K})$ ⇔ $\exists X\in M_{n,1}(\mathbb{K})\simeq\mathbb{K}^n$, $X\neq 0$ et $AX=\lambda X$

⇔ $\mathrm{Ker}\,(A-\lambda I_n)\neq\{0\}$ (c'est le sev propre $E_\lambda(A)$ de A)

⇔ λ est racine de $\chi_A(x)=\det(xid-A)$ (Sp(A) est l'ensemble des valeurs propres)

- Connaissances sur le polynôme caractéristique.

Si $f\in\mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$ev de dimension finie n et A la matrice de f dans une base quelconque,

$$\chi_f(x)=\chi_A(x)=\det(xI_n-A)$$

-> $\chi_f(x)=\chi_A(x)$ est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ unitaire et de degré n

-> Le coefficient constant $(-1)^n\det f=(-1)^n\det A$

->les racines de $\chi_f(x)=\chi_A(x)$ sont les valeurs propres de f (resp de A) et on définit la multiplicité d'une valeur propre comme sa multiplicité en tant que racine de $\chi_f=\chi_A$.

- Trace et déterminant calculés avec les valeurs propres.

Si $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ sont les valeurs propres complexes de A (non nécessairement distinctes) alors le polynôme caractéristique de A est scindée dans $\mathbb{C}[X]$: $\chi_A(x)=(x-\lambda_1)\dots(x-\lambda_n)=x^n-\mathrm{tr}(A)x^{n-1}+\dots+(-1)^n\det(A)$ de sorte que :

$$\mathrm{tr}(A)=\lambda_1+\dots+\lambda_n \quad\text{et}\quad \det(A)=\lambda_1\times\lambda_2\times\dots\times\lambda_n$$

- Connaissance sur matrice semblable.

Deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{K})$ sont semblables lorsqu'il existe $P\in GL_n(\mathbb{K})$ avec $P^{-1}AP=B$.

Caractérisation : Des matrices semblables représentent le même endomorphisme dans des bases distinctes.

$A=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, $B=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ et $P=P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ où $f\in\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ et $\mathcal{B},\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbb{K}^n$

Les matrices ont alors même trace, même déterminant, même polynôme caractéristique et des espaces propres de même dimension. Pour montrer que 2 matrices sont semblables, on peut montrer qu'elles ont la même réduite.

- Lien entre la multiplicité et la dimension d'un espace propre.

Si $f \in \mathscr{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$ev de dimension finie n et A la matrice de f dans une base quelconque,

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(f), \quad 1 \leqslant \dim E_\lambda(f) = \dim E_\lambda(A) \leqslant m(\lambda)$$

avec $m(\lambda)$ la multiplicité de λ en tant que racine de $\chi_f = \chi_A$,
$E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda id)$ et $E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_n)$ sev propre respectivement de f et de A,
(Attention ! $E_\lambda(A) \neq E_\lambda(f)$ sauf si $E = \mathbb{K}^n$ et $\mathscr{B}$ base canonique de $\mathbb{K}^n$. Par contre, ils ont tjs la même dimension)

En particulier, un espace propre associé à une valeur propre simple est toujours de dimension 1.

- Définition de matrice/endomorphisme diagonalisable et trigonalisable.

• Une matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale D.
Un endomorphisme f de E ($\dim E = n < +\infty$) est diagonalisable si sa matrice dans une base quelconque est diagonalisable.
Cela revient à déterminer une base $\mathscr{B}'$ de E où la matrice de f est diagonale ($\mathscr{B}'$ est une base de diagonalisation)

$$\text{Si } A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f), \text{ on a alors} \quad P^{-1}AP = D \quad \text{où } P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \text{ et } D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$$

La diagonale de D contient les valeurs propres de f (resp de A) comptées avec multiplicité.
Les colonnes de la matrice P sont les vecteurs propres de A associés à ces valeurs propres.
Attention ! Pas d'unicité ni de D (l'ordre des vp est qcq sur la diagonale) ni de P (choix multiple pour les vecteurs propres).

• Une matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure. Un endomorphisme f de E ($\dim E = n < +\infty$) est trigonalisable si sa matrice dans une base quelconque est trigonalisable.

- CS et CNS de diagonalisation d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$.

On note χ_A le polynôme caractéristique de la matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $m(\lambda)$ la multiplicité de $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$
• (condition suffisante) Si χ_A est scindé à racines simples dans $\mathbb{K}[X]$ alors A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{K})$

$$\bullet \text{ (CNS) A est diagonalisable sur } M_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \begin{cases} \chi_A \text{ est scindé dans } \mathbb{K}[X] \\ \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ \dim E_\lambda(A) = m(\lambda) \text{ où } \begin{cases} E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_n) \\ m(\lambda) \text{multiplicité de } \lambda \text{ comme racine de } \chi_A \end{cases} \end{cases}$$

OU BIEN :

$$\text{A est diagonalisable sur } M_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} E_\lambda(A) = \mathbb{K}^n \text{ où } E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_n)$$

- CNS de trigonalisation. Lien entre trace/déterminant et valeurs propres.

Si $f \in \mathscr{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$ev de dimension finie n et A la matrice de f dans une base quelconque,

$$f \text{ (resp. A) est trigonalisable} \Leftrightarrow \chi_f \text{ (resp. } \chi_A) \text{ est scindé dans } \mathbb{K}[X]$$

Si : $\chi_f = \chi_A = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$ où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont les n valeurs propres (non nécessairement distinctes)

alors on a : $\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ et $\det(f) = \det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

- Connaissances sur les projecteurs et les symétries

Si E, F et G sont des $\mathbb{K}$ ev avec $E = F \oplus G$ alors : $\forall x \in E, \exists (x_F, x_G) \in F \times G,\ x = x_F + x_G$
• La projecteur sur F parallèlement à G est défini par : $p(x) = x_F$.
On a : $p \in \mathscr{L}(E)$, $F = \mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}\,(p - id)$ et $G = \mathrm{Ker}\, p$.
Caractérisation : p est un projecteur $\Leftrightarrow p \in \mathscr{L}(E)$ et $p \circ p = p$ et on a alors $E = \mathrm{Ker}\, p \oplus \mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}\, p \oplus \mathrm{Ker}\,(p - id)$
Un projecteur est diagonalisable avec $\mathrm{Sp}(p) = \{0, 1\}$ et $\chi_p(x) = (x-1)^r x^{n-r}$ avec $n = \dim E$, $r = \mathrm{rg}(p) = \mathrm{tr}(p)$.

• La symétrie par rapport à F parallèlement à G est défini par : $s(x) = x_F - x_G$.
On a : $s \in \mathscr{L}(E)$, $F = \mathrm{Ker}\,(s - id)$ et $G = \mathrm{Ker}\,(s + id)$.
Caractérisation : s est une symétrie $\Leftrightarrow s \in \mathscr{L}(E)$ et $s \circ s = id$ et on a alors : $E = \mathrm{Ker}\,(s - id) \oplus \mathrm{Ker}\,(s - id)$
Une symétrie est diagonalisable avec $\mathrm{Sp}(p) = \{-1, 1\}$ et $\chi_s(x) = (x-1)^q (x+1)^{n-q}$ avec $n = \dim E$, $\mathrm{tr}(s) = 2q - n$ (puisque $\mathrm{tr}(s) = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{q \text{ fois}} + \underbrace{-1 - 1 \cdots - 1}_{n-q \text{ fois}}$).

2. Fonctions de plusieurs variables

Les théorèmes usuels sur les opérations s'appliquent aux fonctions de plusieurs variables.

- Dérivées partielles d'ordre 1 d'une fonction $[f:\mathscr{U}\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}]$ en $(a,b)\in\mathscr{U}$ où $\mathscr{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^2$. Classe C^1 de f sur $\mathscr{U}$.

  - $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ existe lorsque $\ell=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$ existe dans $\mathbb{R}$ et alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\ell$
  - $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ existe lorsque $\ell=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}$ existe dans $\mathbb{R}$ et alors $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)=\ell$
  - f est de classe C^1 sur $\mathscr{U}$ lorsque f admet des dérivées $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ qui sont continues en tout point de $\mathscr{U}$.

- Formule de Taylor-Young à l'ordre 1 pour une fonction $[f:\mathscr{U}\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}]$ en $(a,b)\in\mathscr{U}$ où $\mathscr{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^2$

  Si f est de classe C^1 sur $\mathscr{U}$ alors

  $$f(a+h,b+k)=f(a,b)+h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)+\overbrace{\sqrt{h^2+k^2}\,\varepsilon(h,k)}^{=o(\|(h,k)\|)}\quad\text{où}\quad\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$$

- Dérivées partielles d'une fonction composée $\big[g:(x,y)\mapsto f\big(u(x,y),v(x,y)\big)\big]$

  Étant donné des ouverts $\mathscr{U}$ et $\mathscr{U}'$ de $\mathbb{R}^2$

  $$\text{Si}\left\{\begin{array}{l}[u:(x,y)\mapsto u(x,y)]\text{ et }[v:(x,y)\mapsto v(x,y)]\text{ dans }C^1(\mathscr{U};\mathbb{R})\\ [f:(u,v)\mapsto f(u,v)]\in C^1(\mathscr{U}',\mathbb{R})\\ \forall(x,y)\in\mathscr{U},\ \big(u(x,y),v(x,y)\big)\in\mathscr{U}'\end{array}\right.\quad\text{alors }\big[g:(x,y)\mapsto f\big(u(x,y),v(x,y)\big)\big]\in C^1(\mathscr{U},\mathbb{R})\text{ et :}$$

  $$\forall(x,y)\in\mathscr{U},\quad \begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)&=\frac{\partial f}{\partial u}\big(u(x,y),v(x,y)\big)\times\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial v}\big(u(x,y),v(x,y)\big)\times\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)&=\frac{\partial f}{\partial u}\big(u(x,y),v(x,y)\big)\times\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial v}\big(u(x,y),v(x,y)\big)\times\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\end{aligned}$$

- Dérivées partielles d'ordre 2 de $\left[\begin{array}{ccc}f:\mathscr{U}\subset\mathbb{R}^2&\to&\mathbb{R}\\(x_1,x_2)&\to&f(x_1,x_2)\end{array}\right]$ en $(a,b)\in\mathscr{U}$ où $\mathscr{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^2$. Classe C^2 sur $\mathscr{U}$.

  - Pour $(i,j)\in\{1,2\}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a,b)$ existe lorsque $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a,b)$ existe.

  Par exemple, pour $\left\{\begin{array}{l}i=1\\j=2\end{array}\right.$, cela signifie : $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a+h,b)-\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a,b)}{h}$ existe dans $\mathbb{R}$. Rem Si $i=j$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a,b)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_i}(a,b)$

  - f est de classe C^2 sur $\mathscr{U}$ lorsque les dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$ existent et sont continues sur $\mathscr{U}$

- Théorème de Schwarz

  Si $[f:\mathscr{U}\to\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}]$ est de classe C^2 sur $\mathscr{U}$ alors $\forall(x,y)\in\mathscr{U}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)$