Questions de cours possibles sur la semaine n° 15 et 16

Intégrabilité des fonctions de référence en PT

- $[t \mapsto \ln t]$ est intégrable en 0 (donc sur $]0,b]$ pour tout $b>0$ quelconque). En particulier : $\displaystyle\int_0^1 (\ln t)\mathrm{d}t$ converge et vaut -1

Corollaire $[t \mapsto \ln(a+t)]$ est intégrable sur $]-a,b]$ pourtout $b>-a$ quelconque)

$f=[t\mapsto \ln t]$ est C^0 sur $]0,+\infty[$ et, par la relation de Chasles : $\displaystyle\int_0^b |\ln t|\mathrm{d}t = \int_0^1 |\ln t|\mathrm{d}t + \int_1^b |\ln t|\mathrm{d}t = -\int_0^1 \ln t\mathrm{d}t + \int_1^b \ln t\mathrm{d}t$

Or, puisque $\displaystyle\int_1^b f(t)\mathrm{d}t$ converge (fonction C^0 sur un segment), les intégrales $\displaystyle\int_0^b |f(t)|\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ ont la même nature.

On prouve la convergence en revenant à la définition en étudiant $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\int_x^1 \ln t\mathrm{d}t$

On utilise une intégration par parties avec : $\begin{cases} u'(t)=1 & u(t)=t \\ v(t)=\ln t & v'(t)=\frac{1}{t}\end{cases}$ où u et v sont C^1 sur $]0,1]$

$\displaystyle\int_x^1 \ln t\mathrm{d}t = [t\ln t]_x^1 - \int_x^1 \mathrm{d}t = -x\ln x-(1-x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -1$ car $x\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ par croissance comparée

Posons $u=a+t$ dans $\displaystyle\int_{-a}^b \ln(a+t)\mathrm{d}t$: $\quad \mathrm{d}u=\mathrm{d}t$, $t\left|\begin{matrix} b \\ -a\end{matrix}\right.$, $u\left|\begin{matrix} a+b \\ 0\end{matrix}\right.$ où $[t\mapsto a+t]$ est C^1, strictement croissant donc bijectif de $]-a,b]$ vers $]0,a+b]$: $\displaystyle\int_{-a}^b \ln(a+t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{a+b} \ln(u)\mathrm{d}u$ ont la même nature donc converge absolument

- Pour α réel, $[t\mapsto e^{-\alpha t}]$ est intégrable en $+\infty$ (donc sur $[a,+\infty[$ pour a réel quelconque) $\Leftrightarrow \alpha>0$

En particulier : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ converge absolument $\Leftrightarrow \alpha>0$ et dans ce cas : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$

$f=[t\mapsto e^{-\alpha t}]$ est C^0 sur $\mathbb{R}$ et elle y est positive : les notions de convergence absolue et de convergence se confondent.

Par la relation de Chasles : $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^0 f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$. Or, puisque $\displaystyle\int_a^0 f(t)\mathrm{d}t$ converge (fonction continue sur un segment), les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ ont la même nature.

Ici, on peut déterminer facilement une primitive donc on revient à la définition en étudiant la limite de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

si $\alpha=0$: $\displaystyle\int_0^x e^{-\alpha t}\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{d}t = x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ diverge si $\alpha=0$

si $\alpha\neq 0$: $\displaystyle\int_0^x e^{-\alpha t}\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-\alpha t}}{-\alpha}\right]_0^x = \frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \begin{cases} +\infty \text{ si } \alpha<0 \\ \frac{1}{\alpha} \text{ si } \alpha>0\end{cases}$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \begin{cases}\text{diverge si } \alpha<0 \\ \text{converge si } \alpha>0\end{cases}$

- (Riemann en $+\infty$) Pour α réel, $\left[t\mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}\right]$ est intégrable en $+\infty$ (donc sur $[a,+\infty[$ pour $a>0$ réel quelconque) $\Leftrightarrow \alpha>1$

En particulier, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha>1$ et, dans ce cas : $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$

$f=\left[t\mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}\right]$ est C^0 sur $]0,+\infty[$ et elle y est positive donc les notions de convergence absolue et de convergence se confondent. Par la relation de Chasles : $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^1 f(t)\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$

Mais $\displaystyle\int_a^1 f(t)\mathrm{d}t$ converge (fonction C^0 sur un segment) donc les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ ont la même nature.

Ici, on peut déterminer facilement une primitive donc on revient à la définition en étudiant la limite de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

si $\alpha=1$: $\displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = [\ln t]_1^x = \ln x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ diverge si $\alpha=1$

si $\alpha\neq 1$: $\displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{d}t = \int_1^x t^{-\alpha}\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^x = \frac{e^{(1-\alpha)\ln x}-1}{1-\alpha} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \begin{cases} \frac{-1}{1-\alpha} \text{ si } 1-\alpha<0 \\ +\infty \text{ si } 1-\alpha>0\end{cases}$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \begin{cases}\text{diverge si } \alpha<1 \\ \text{converge si } \alpha>1\end{cases}$

- (Riemann en 0) Pour α réel, $\left[t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}\right]$ est intégrable en 0 (donc sur $]0,b]$ pour $b>0$ quelconque) $\Leftrightarrow \alpha<1$

$$\text{En particulier : } \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha<1 \quad \text{et, dans ce cas : } \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$$

Corollaire (Riemann en $a\in\mathbb{R}$)

Pour α réel, $\left[t \mapsto \dfrac{1}{(t-a)^\alpha}\right]$ est intégrable en a^+ (donc sur $]a,b]$ pour $b>a$ quelconque) $\Leftrightarrow \alpha<1$

Pour α réel, $\left[t \mapsto \dfrac{1}{(a-t)^\alpha}\right]$ est intégrable en a^- (donc sur $[b,a[$ pour $b<a$ quelconque) $\Leftrightarrow \alpha<1$

$f=\left[t\mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}\right]$ est C^0 sur $]0,+\infty[$ et elle y est positive : les notions de convergence absolue et de convergence se confondent.

Par la relation de Chasles : $\displaystyle\int_0^b f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t + \int_1^b f(t)\mathrm{d}t$ Or, puisque $\displaystyle\int_0^b f(t)\mathrm{d}t$ converge (fonction continue sur un segment), les intégrales $\displaystyle\int_0^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ ont la même nature.

Ici, on peut déterminer facilement une primitive donc on revient à la définition en étudiant la limite de $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$.

si $\alpha=1$: $\displaystyle\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = [\ln t]_x^1 = -\ln x \xrightarrow[x\to0^+]{} +\infty$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ diverge si $\alpha=1$

si $\alpha\neq1$: $\displaystyle\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_x^1 t^{-\alpha}\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_x^1 = \frac{1-e^{(1-\alpha)\ln x}}{1-\alpha} \xrightarrow[x\to0^+]{} \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} \text{ si } 1-\alpha>0 \\ +\infty \text{ si } 1-\alpha<0\end{cases}$ donc $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \begin{cases} \text{diverge si } \alpha>1 \\ \text{converge si } \alpha<1\end{cases}$

Pour le corollaire, on utilise un changement de variable :

- si on pose $u=t-a$ dans $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha}$: $\mathrm{d}u=\mathrm{d}t$, $t\left|\begin{matrix} b \\ a\end{matrix}\right.$, $u\left|\begin{matrix} b-a \\ 0\end{matrix}\right.$ où $[t\mapsto t-a]$ est C^1, strictement croissante donc bijective de $]a,b]$ vers $]0,b-a]$: $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha}$ et $\displaystyle\int_0^{b-a}\frac{\mathrm{d}u}{u^\alpha}$ ont même nature donc convergent si et seulement si $\alpha<1$
- si on pose $u=a-t$ dans $\displaystyle\int_b^a \frac{\mathrm{d}t}{(a-t)^\alpha}$: $\mathrm{d}u=-\mathrm{d}t$, $t\left|\begin{matrix} a \\ b\end{matrix}\right.$, $u\left|\begin{matrix} 0 \\ a-b\end{matrix}\right.$ où $[t\mapsto a-t]$ est C^1, strictement décroissante donc bijective de $[b,a[$ vers $[0,a-b[$: $\displaystyle\int_b^a \frac{\mathrm{d}t}{(a-t)^\alpha}$ et $\displaystyle\int_{a-b}^0 \frac{-\mathrm{d}u}{u^\alpha} = \int_0^{a-b}\frac{\mathrm{d}u}{u^\alpha}$ ont même nature convergente si et seulement si $\alpha<1$

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ converge (absolument) et $\displaystyle\int_0^1 t\ln t\,\mathrm{d}t$ converge (absolument)

• $\left[f : t\mapsto \dfrac{\sin t}{t}\right]$ est C^0 sur $\mathbb{R}^*$ par quotient et se prolonge par continuité en 0 puisque :
$f(t)\sim_0 \dfrac{t}{t}=1$ donc $\displaystyle\lim_{t\to0} f(t)=1$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ converge par prolongement continue en 0 et, puisque f est positive sur $]0,1]$, la convergence est bien absolue.
• $[g : t\mapsto t\ln t]$ est C^0 sur $]0,+\infty[$ et se prolonge par continuité en 0 puisque : $\displaystyle\lim_{t\to0} t\ln t=0$ (croissance comparée)
Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t$ converge par prolongement continue en 0 et, puisque g est négative sur $]0,1]$, la convergence est absolue.

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge et, plus généralement, $[t\mapsto e^{-t^2}]$ est intégrable sur $\mathbb{R}$

$f=[t\mapsto e^{-t^2}]$ est C^0 et elle est positive sur $[0,+\infty[$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ de même nature et la convergence se confond avec la convergence absolue. Par parité, $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ ont la même nature de sorte que l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}$ se déduit de celle en $+\infty$.

Preuve nº 1 : On a $e^{-t^2} = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ puisque $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2e^{-t^2} = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x}=0$ par croissance comparée aussi, par la règle du o, puisque $\left[t\mapsto\dfrac{1}{t^2}\right]$ est intégrable en $+\infty$ (Riemann avec $\alpha=2>1$), on peut dire que $[t\mapsto e^{-t^2}]$ est intégrable en $+\infty$

Preuve nº 2 : Sur $[1,+\infty[$: $t\leqslant t^2 \Rightarrow 0\leqslant e^{-t^2}\leqslant e^{-t}$ Or : $[t\mapsto e^{-t}]$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (fonction de référence avec $\alpha=1>0$) donc, par majoration, $[t\mapsto e^{-t^2}]$ est intégrable en $+\infty$

Preuve nº 3 : Sur $[1,+\infty[$: $1\leqslant t\Rightarrow 0<e^{-t^2}\leqslant te^{-t^2}$ Mais $[g : t\mapsto te^{-t^2}]$ est C^0 sur $[1,+\infty[$ et, pour $x>1$:
$\displaystyle\int_1^x te^{-t^2}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_1^x(-2t)e^{-t^2}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\left[e^{-t^2}\right]_1^x = -\frac{1}{2}(e^{-x^2}-e^{-1}) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{2e}$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$ converge (absolument).
et, par majoration, on obtient que $[t\mapsto e^{-t^2}]$ est intégrable en $+\infty$

Bilan sur les théorèmes sur les intégrales généralisées

- Définition d'une intégrale généralisée sur $[a, b[$ et CNS de convergence pour une fonction positive

On écrit les résultats pour $\mathrm{I} = [a, b[$ ($a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ mais ils s'adaptent à un intervalle $]a, b]$ ($a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$)
Si f est une fonction continue sur $]a, b]$,
on dit que $\displaystyle\int_{[a,b[} f(t)\mathrm{d}t$ converge lorsque $\displaystyle\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ existe dans $\mathbb{R}$ et alors on note $\displaystyle\int_{[a,b[} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

Lorsque la fonction f est continue et positive sur $[a, b[$, $\left[x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]$ est croissante sur $[a, b[$ de sorte que

$$\int_{[a,b[} f(t)\mathrm{d}t \text{ converge} \Leftrightarrow \left[x \mapsto \textstyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right] \text{ est majorée sur } [a, b[$$

- Propriétés de l'intégrale généralisée

On écrit les théorèmes pour $\mathrm{I} = [a, b[$ ($a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ mais ils s'adaptent à un intervalle $]a, b]$ ($a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$)
Si f et g sont continues sur I et $\alpha \in \mathbb{K}$ alors :

Linéarité : si deux termes au moins sur les trois convergent : $\displaystyle\int_a^b \big(\alpha f(t) + g(t)\big)\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$

Positivité : si $f \geqslant 0$ sur I et si l' intégrale converge, $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$

Croissance : si $f \leqslant g$ sur I et si les deux intégrales convergent, $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$

Fonction positive continue d'intégrale nulle : Si $\begin{cases} f \geqslant 0 \text{ sur I} \\ f \text{ est continue sur I} \end{cases}$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0$ alors $f = 0$ sur I.

- Fonction intégrable sur un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, intégrale absolument convergente et propriétés associées

Une fonction $[f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}]$ est intégrable sur I lorsque f est C^0 sur I et $\displaystyle\int_\mathrm{I} |f(t)|\mathrm{d}t$ converge. On dit aussi que $\displaystyle\int_\mathrm{I} f(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente. On sait que : f est intégrable sur I $\Rightarrow \displaystyle\int_\mathrm{I} f(t)\mathrm{d}t$ converge (La réciproque est fausse)
On note $\mathrm{L}_1(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ le sev de $\mathrm{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ contenant les fonctions intégrables sur I. Les propriétés de l'intégrale (linéarité, positivité, croissance, fonction continue positive d'intégrale nulle) sont toujours vérifiées sur $\mathrm{L}_1(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ et on a aussi
Inégalité triangulaire : $\displaystyle\left|\int_\mathrm{I} f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_\mathrm{I} |f(t)|\mathrm{d}t$

- Théorème de comparaison pour les intégrales généralisées

On écrit les théorèmes pour $\mathrm{I} = [a, b[$ ($a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ mais ils s'adaptent à un intervalle $]a, b]$ ($a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$)

- Majoration : $\begin{cases} 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t) \text{ au voisinage de } b \\ \displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t \text{ converge} \end{cases} \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge
- Minoration : $\begin{cases} 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t) \text{ au voisinage de } b \\ \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \text{ diverge} \end{cases} \Rightarrow \displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$diverge
- Critère d'équivalence : Si $f(t) \sim_b g(t)$ et si g est intégrable au voisinage de b alors f est intégrable au voisinage de b

OU BIEN Si $f(t) \sim_b g(t) \geqslant 0$ au voisinage de b alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ ont même nature.

- Règle du o : Si $\begin{cases} f(t) = o_b\big(g(t)\big) \\ g \text{ intégrable sur } [a, b[\end{cases} \Rightarrow f$ intégrable sur $[a, b[$ (énoncé possible avec $f(t) = \mathrm{O}_b\big(g(t)\big)$)

- Intégrations par parties

Soient u et v des applications à valeurs réelles de classe C^1 sur l'intervalle $\mathrm{I} = (a, b)$ de $\mathbb{R}$ (où a et b sont dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$)

Si $[u(t)v(t)]_a^b$ converge alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t$ ont la même nature

et, si elles convergent, on a : $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t$

En pratique, l'IPP sera pertinente si on prouve que 2 termes sur les 3 convergent.
Lorsque $[u(t)v(t)]_a^b$ diverge mais $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t$ converge, on peut revenir à la définition de l'intégrale généralisée pour mener une IPP sur un segment et passer à la limite à la fin des calculs (il peut y avoir compensation sur les termes divergents $[u(t)v(t)]_a^b$ et $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t$)

- Changement de variables

On pose $x = \varphi(t)$ où
φ est une application de classe C^1, strictement monotone sur l'intervalle I donc bijective de I dans l'intervalle $J = \varphi(I)$
Lorsque f est une application continue sur l'intervalle J
alors $\int_J f(x)\mathrm{d}x$ et $\int_I f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$ ont la même nature et, si elles convergent, elles sont égales.

- Intégration terme à terme

Soit $[S : I \to \mathbb{R}]$ une fonction C^0 sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ telle qu'il existe des fonctions $[f_n : I \to \mathbb{R}]$ avec $\forall t \in I, \quad S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$

Si $\begin{cases} \text{i) la fonction S est continue sur I} \\ \text{ii) toutes les fonctions } f_n \text{ sont intégrables sur I} \\ \text{iii) La série } \sum \int_I |f_n(t)|\mathrm{d}t \text{ est convergente} \end{cases}$ alors S est intégrable sur I

et on a alors : $\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t = \int_I S(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_I f_n(t)\mathrm{d}t\right)$