Questions de cours possibles sur la semaine n° 13 et 14

1. Bilan sur les courbes planes

- Équations cartésiennes réduites et représentation paramétrique d'une conique

Dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthonormée, on repère une conique

— du genre ellipse par une équation : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ou par une représentation : $\begin{cases} x(t)=a\cos t \\ y(t)=b\sin t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

Le centre est O et les axes de symétries sont $O+\text{Vect}(\vec{\imath})$ et $O+\text{Vect}(\vec{\jmath})$. Les sommets sont $A(a,0)$, $A'(-a,0)$, $B(0,b)$ et $B'(0,-b)$ où les tangentes y sont perpendiculaires aux axes de symétries.

— du genre hyperbole par une équation : $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ou par une représentation : $\begin{cases} x(t)=\pm a\,\text{ch}\, t \\ y(t)=b\,\text{sh}\, t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

Le centre est O, les axes de symétries sont $O+\text{Vect}(\vec{\imath})$ et $O+\text{Vect}(\vec{\jmath})$ mais l'axe focal est $O+\text{Vect}(\vec{\imath})$ qui contient les sommets $A(a,0)$ et $A(-a,0)$ où la tangente est perpendiculaire à l'axe. Les asymptotes les droites $O+\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} a\\ \pm b\end{pmatrix}\right)$

Une équation $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ *a pour axe focal* $O+\text{Vect}(\vec{\jmath})$ *et pour sommet* $B(0,b)$ *et* $B'(0,-b)$

— du genre parabole par une équation : $y^2=2px$ ou par une représentation : $\begin{cases} x(t)=\frac{t^2}{2p} \\ y(t)=t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

Le sommet est O, l'axe de symétrie est $O+\text{Vect}(\vec{\imath})$ et la parabole est dans le demi-plan où x à le signe de p.

Une équation $x^2=2py$ *donnera une parabole d'axe* $O+\text{Vect}(\vec{\jmath})$

- Connaissances sur les branches infinies

Une courbe Γ paramétrée par $[f: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2]$ décrite par le point courant $M(t)$ avec $\overrightarrow{OM(t)}=f(t)$ présente une branche infinie en t_0 si $\lim\limits_{t\to t_0}\|f(t)\|=+\infty$ (autrement dit le point $M(t)$ part à l'infini lorsque t tend vers t_0)

— si l'une seulement des coordonnées par à l'infinie, il s'agit d'une asymptote

$$\text{verticale si} \begin{cases} x(t)\to a\\ y(t)\to\pm\infty\end{cases} \quad\text{ou horizontale si}\begin{cases} x(t)\to\pm\infty\\ y(t)\to a\end{cases}$$

— si les deux coordonnées partent à l'infinie, on étudie $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{y(t)}{x(t)}=m$

– si $m=0$, il s'agit d'une branche parabolique dans la direction $O+\text{Vect}(\vec{\imath})$

– si $m=\pm\infty$, il s'agit d'une branche parabolique dans la direction $O+\text{Vect}(\vec{\jmath})$

– si $m\in\mathbb{R}^*$, on étudie $\lim\limits_{t\to t_0}\big(y(t)-mx(t)\big)=p$

∗ si $p=\pm\infty$, il s'agit d'une branche parabolique dans la direction de la droite $\Delta:\ y=mx$

∗ si $p\in\mathbb{R}$, il s'agit d'une asymptote oblique d'équation $\Delta:\ y=mx+p$

Le signe de $y(t)-\big(mx(t)+p\big)$ précise la position de Γ par rapport à son asymptote Δ

- Connaissances sur les tangentes à une courbe plane (2 cas possible selon que la courbe est donnée par une représentation cartésienne ou par une représentation paramétrique)

Si Γ est une courbe située dans le plan munit d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthonormée et M_0 un point de Γ.

• Si Γ est donnée par une représentation paramétrique, on note

$[f: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2]$ la fonction vectorielle associée, $M(t)$ avec $f(t)=\overrightarrow{OM(t)}$ le point de paramètre t et $t_0\in I$ avec $M_0=M(t_0)$

On suppose f de classe C^k avec $k\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ suffisamment grand. Alors :

– la tangente $\mathcal{T}_0$ à Γ au point $M(t_0)$ est la position limite des cordes $(M(t)M(t_0))$ lorsque t tend vers t_0

– on a $\mathcal{T}_0=M(t_0)+\text{Vect}\left(f^{(p)}(t_0)\right)$ où $f^{(p)}(t_0)$ est la première dérivée non nulle dans la suites des dérivées successives de p. Si $p=1$, le point M_0 est régulier. Si $p>1$, le point M_0 est stationnaire.

– Lorsque le point M_0 est stationnaire, on détermine (avec un DL de f en t_0) la dérivée $f^{(q)}(t_0)$ suivante avec $q>p$ non colinéaires à $f^{(p)}(t_0)$ et, selon la parité de p et q, on précise l'allure du point : ordinaire, inflexion, rebroussement de première ou de seconde espèce.

• Si Γ est donnée par une représentation cartésienne $f(x,y)=0$ avec f de classe C^1 et $M_0(x_0,y_0)$

Le point M_0 est régulier lorsque $\overrightarrow{grad}f(M_0)\neq 0$ où $\overrightarrow{grad}f(M)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}$ dirige la normale à Γ

autrement dit on obtient une équation cartésienne de la tangente $\mathcal{T}_0$ à M_0 en Γ avec

$$M(x,y)\in\mathcal{T}_0 \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}.\overrightarrow{grad}f(M_0)=0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)=0$$

- Méthode pour déterminer l'enveloppe d'une famille de droites $(\mathscr{D}_t)_{t\in I}$

On part d'une représentation paramétrique des droites $\mathscr{D}_t$: $\mathscr{D}_t = A(t) + \text{Vect}\left(\vec{u}(t)\right)$ avec A et $\vec{u}$ de classe C^1
L'enveloppe $\mathscr{E}$ des droites $(\mathscr{D}_t)$ est la courbe régulière décrite par le point $C(t)$ telle que
la droite $\mathscr{D}_t$ est la tangente à la courbe $\mathscr{E}$ en $C(t)$
:
• $C(t) \in \mathscr{D}_t$ donc : $\overrightarrow{OC(t)} = \overrightarrow{OA(t)} + \lambda(t)\vec{u}(t)$ où $[\lambda : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}]$ est de classe C^1
• $\dfrac{d\overrightarrow{OC(t)}}{dt}$ et $\vec{u}(t)$ sont colinéaires soit : $\det\left(\dfrac{d\overrightarrow{OC(t)}}{dt}, \vec{u}(t)\right) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \lambda(t) = \dots$ (à refaire au cas par cas)
La fonction vectorielle $f = [t \mapsto \overrightarrow{OC(t)}]$ donnera un paramétrage régulier de l'enveloppe $\mathscr{E}$

- Connaissance sur le repère de Frénet, la courbure, le rayon et le centre de courbure

Soit une courbe Γ paramétrée par la fonction vectorielle $[f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2]$ de classe C^1 et $M(t)$ le point courant de Γ (donc $f(t) = \overrightarrow{OM(t)}$)
— la courbe est régulière si $s'(t) = \|f'(t)\| = \left\|\dfrac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt}\right\| \neq 0$ sur I (s est une abscisse curviligne) :

$$s(t) = \int_{t_0}^{t_1} \|f'(t)\| dt \text{ est la longueur de la portion d'arc pour } t \in [t_0, t_1]$$

— le repère de Frénet en $M(t)$ est alors le repère $\left(M(t), \vec{T}, \vec{N}\right)$ où

$$\vec{T} = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|} \quad \text{et} \quad \vec{N} = \begin{pmatrix} -y_T \\ x_T \end{pmatrix} \text{ unitaire et directement orthogonal à } \vec{T} = \begin{pmatrix} x_T \\ y_T \end{pmatrix}$$

— les vecteurs $\dfrac{d\vec{T}}{ds} = \dfrac{1}{s'(t)}\dfrac{d\vec{T}}{dt}$ et $\vec{N}$ sont colinéaires : on appelle courbure le réel γ tel que : $\dfrac{d\vec{T}}{ds} = \gamma\vec{N}$
— Pour calculer la courbure :
  – soit on trouve un relèvement de $\vec{T}$: $\vec{T} = \cos\left(\alpha(t)\right)\vec{\imath} + \sin\left(\alpha(t)\right)\vec{\jmath}$ où α est C^1 càd $\alpha(t) = \left(\vec{\imath}, \vec{T}\right)$
  et $\gamma = \dfrac{d\alpha}{ds} = \dfrac{\alpha'(t)}{s'(t)}$ *(Interprétation géométrique : $\gamma > 0 \Rightarrow \alpha$ croît $\Rightarrow \Gamma$ "tourne vers la gauche")*
  – soit on utilise la formule de Frénet $\dfrac{d\vec{T}}{ds} = \gamma\vec{N}$ en comparant l'une des coordonnées des vecteurs
— on dit que la courbe est bi-régulière lorsque $\gamma \neq 0$ et on définit le rayon de courbure par $R = \dfrac{1}{\gamma}$ et le centre C de courbure par : $\overrightarrow{MC} = R\vec{N} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + R\vec{N}$

- Définition et caractérisation de la développée d'une courbe plane

Soit une courbe Γ paramétrée par la fonction vectorielle $[f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2]$ de classe C^1 et régulière,
on note $\left(\vec{T}, \vec{N}\right)$ la base de Frénet et γ la courbure en $M = M(t)$ où $f(t) = \overrightarrow{OM(t)}$
— la développée de Γ est, par définition, la courbe Γ_D décrite par les centres de courbures de Γ :

$$\Gamma_D = \left\{\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + R\vec{N} \mid M \in \Gamma\right\} \text{ aussi elle est paramétrée par } g(t) = \overrightarrow{OM(t)} + R\vec{N}$$

— la développée est aussi l'enveloppe des normales $(\mathscr{D}_t)_{t\in I}$ à la courbe Γ avec $\mathscr{D}_t = M(t) + \text{Vect}\left(\vec{n}(t)\right)$ où $\vec{n}$ est un vecteur colinéaire à $\vec{N}$

2. Nombres complexes (partie 2) (géométrie)

- Forme algébrique et trigonométrique d'un nombre complexe, module et argument et interprétation géométrique.

La forme algébrique d'un nombre complexe z est de la forme $z = a + ib$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
La forme trigonométrique d'un nombre complexe z est de la forme $z = re^{i\theta}$ où $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, $r \geqslant 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$
Le réel $r = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ est le module du complexe z et le réel θ est un argument, défini modulo 2π prés.
Dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan,
- le complexe z est l'affixe du point M (ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$) de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
- le module donne la distance $OM = |z|$ et l'argument donne une mesure de l'angle $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}) = \arg(z)$ $[2\pi]$

- Affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$, longueur AB et angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$ à l'aide des affixes z_A, z_B, z_C, z_D des points A, B, C et D

$\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z = z_B - z_A$, $AB = |z_B - z_A|$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$ $[2\pi]$

- Définition avec les nombres complexes des translations, homothéties et rotations.

M′ d'affixe z' est l'image de M d'affixe z par la translation de vecteurs $\vec{u}$ d'affixe a lorsque
$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow z' - z = a \Leftrightarrow z' = z + a$$
M′ d'affixe z' est l'image de M d'affixe z par l'homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport $k \in \mathbb{R}$ lorsque
$$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow z' - \omega = k(z-\omega) \Leftrightarrow z' = \omega + k(z-\omega)$$
M′ d'affixe z' est l'image de M d'affixe z par la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ lorsque
$$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta; [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z'-\omega| = |z-\omega| \\ \arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right) = \theta\ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \frac{z'-\omega}{z-\omega} = 1 \times e^{i\theta} \Leftrightarrow z' = \omega + e^{i\theta}(z-\omega)$$

- Racine n ième de l'unité

Les racines $n$ième de l'unité sont les n solutions de l'équation $z^n = 1$: il s'agit des nombres $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ où $k \in [\![0, n-1]\!]$ qu'on rassemble dans l'ensemble $\mathbb{U}_n$: $\mathbb{U}_n = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in [\![0, n-1]\!]\right\} = \left\{w^k \mid k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$ où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$

Il s'agit des affixes des n sommets d'un polygône régulier à n côté inscrit dans le cercle unité : le premier sommet est en A_0 d'affixe $z_0 = 1$, le sommet suivant A_1 est le point du cercle unité tel que $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA_1}\right) = (\vec{i}, \overrightarrow{OA_1}) = \dfrac{2\pi}{n}$ (on coupe 2π en n parties égales) d'où $z_1 = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et on avance de sommet en sommet en appliquant une rotation de centre O d'angle $\dfrac{2\pi}{n}$ au sommet précédent soit $z_{k+1} = e^{\frac{2i\pi}{n}} z_k$

3. $\boxed{\text{Bilan sur les équations différentielles (PTSI/PT)}}$

- Résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 (EDL1) $\quad y' + a(x)y = b(x) \quad$ avec a et b C^0 sur l'intervalle I

L'ensemble solution est de la forme $\mathscr{S} = y_p + \mathrm{Vect}(h) = \left\{y_p + C \times h \mid C \in \mathbb{K}\right\}$ où

  - h est une solution de l'équation homogène $y' + a(x)y = 0$ telle que $h(x) = e^{-A(x)}$ avec A <u>une</u> primitive de a sur I.
    Remarques : On simplifie au maximum les exponentielles/logarithmes. En cas de présence de valeurs absolues, on peut éventuellement faire porter le signe sur la constante C si l'expression en valeur absolue garde un signe constant sur I pour faire "disparaître" les valeurs absolues.
  - y_p est <u>une</u> solution particulière qu'on peut obtenir
    - ~ en la recherchant analogue au second membre quitte à utiliser le principe de superposition des solutions
    - ~ en utilisant le principe de variations de la constante : $y_p(x) = C(x)h(x)$ où la fonction inconnue C de classe C^1 sur I vérifie : $C'(x)h(x) + \underbrace{C(x)h'(x) + a(x)C(x)h(x)}_{=0} = b(x) \Leftrightarrow C'(x) = \dfrac{b(x)}{h(x)}$

      On ne remplace h que pour la recherche finale de primitive

  Pour une équation $\quad \alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x) \quad$ *on commence par résoudre sur des sous-intervalles où l'équation est résolue (càd* $\alpha(x) \neq 0$*) puis on étudie éventuellement le recollement aux zéros de* α.

- Théorème de Cauchy linéaire et structure des ensembles de solutions pour
$$y'' + a(t)y' + b(t) = c(t) \quad \text{où } a, b, c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K} \text{ sont } C^0 \text{ sur l'intervalle I}$$

On considère une équation différentielle scalaire linéaire d'ordre 2 à résoudre sur l'intervalle I
$$(E) : \ y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t) \quad \text{où } a, b, c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K} \text{ sont } C^0 \text{ sur l'intervalle I}$$

- $\boxed{\textbf{Théorème de Cauchy linéaire}}$ (ADMIS) Pour $(t_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$,

  le problème de Cauchy $\begin{cases} (E) : \ y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$ possède une unique solution.

- L'ensemble $\mathscr{S}_H$ des solutions homogènes i.e. des solutions de l'équation (H) : $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ est un sous-espace vectoriel de $C^2(I, \mathbb{K})$ de dimension 2.
$$\mathscr{S}_H = \mathrm{Vect}(h_1, h_2) \text{ dans } C^2(I, \mathbb{K}) \text{ où } \underline{h_1 \text{ et } h_2 \text{ sont deux solutions homogènes non colinéaires}}$$

- L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est
$$\mathscr{S} = \left\{y_p + C_1 h_1 + C_2 h_2 \mid (C_1, C_2) \in \mathbb{R}\right\} = y_p + \mathrm{Vect}(h_1, h_2) \qquad \text{où } y_p \text{ est une solution particulière de (E).}$$
  Une solution de (E) est la somme d'une solution particulière et d'une solution homogène.

  On peut utiliser *le principe de superposition des solutions* :

  si $\begin{cases} y_1 \text{ est solution pour le 2nd membre } c_1 \\ y_2 \text{ est solution pour le 2nd membre } c_2 \end{cases}$ alors $y = \alpha y_1 + y_2$ est solution pour le 2nd membre $\alpha c_1 + c_2$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

- Résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 scalaire homogène

$$ay''+by'+cy=0 \text{ avec } (a,b,c)\in\mathbb{K}^3 \text{ fixé}$$

Pour déterminer l'ensemble $\mathscr{S}_h$ des solutions, on commence par résoudre l'équation caractéristique $ar^2+br+c=0$

– $\boxed{\text{si } \mathbb{K}=\mathbb{R}}$: il y a 3 cas possibles

$\Delta>0$ (2 racines réelles distinctes), $\Delta=0$ (une racine réelle double) et $\Delta<0$ (2 racines complexes conjuguées)

Cas $\Delta>0$: $\mathscr{S}_h=\text{Vect}(f_1,f_2)=\left\{[t\mapsto \text{A}e^{r_1t}+\text{B}e^{r_2t}] \mid (\text{A},\text{B})\in\mathbb{R}^2\right\}$ avec $f_i(x)=e^{r_ix}$ où r_1 et r_2 sont les 2 racines distinctes.

Cas $\Delta=0$: $\mathscr{S}_h=\text{Vect}(f_1,f_2)=\left\{[t\mapsto (\text{A}t+\text{B})e^{rt}] \mid (\text{A},\text{B})\in\mathbb{R}^2\right\}$ avec $f_1(x)=xe^{rx}$ et $f_2(x)=e^{rx}$ où r est la racine double.

Cas $\Delta<0$: $\mathscr{S}_h=\text{Vect}(f_1,f_2)=\left\{[t\mapsto e^{rt}(\text{A}\cos(\omega t)+\text{B}\sin(\omega t))] \mid (\text{A},\text{B})\in\mathbb{R}^2\right\}$
avec $f_1(x)=e^{rx}\cos(\omega x)$ et $f_2(x)=e^{rx}\sin(\omega x)$ où $r\pm i\omega$ sont les racines complexes conjuguées.

– $\boxed{\text{si } \mathbb{K}=\mathbb{C}}$: il y a 2 cas possibles $\Delta\neq0$ (2 racines distinctes) et $\Delta=0$ (une racine double).

Le cas $\Delta\neq0$ se traite comme le cas $\Delta>0$ du point précédent avec les constantes $(\text{A},\text{B})\in\mathbb{C}^2$.

Le cas $\Delta=0$ se traite comme le cas $\Delta=0$ du point précédent avec les constantes $(\text{A},\text{B})\in\mathbb{C}^2$.

- Résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 scalaires

$$ay''+by'+cy=d(x) \quad \text{avec } (a,b,c)\in\mathbb{K}^3 \text{ fixé et } d \text{ continue sur l'intervalle I}$$

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S}=y_p+\mathscr{S}_h=\{y_p+h \mid h\in\mathscr{S}_h\}$
où $\mathscr{S}_h$ est l'ensemble des solutions de l'équation homogène et y_p est une solution particulière.
On obtient y_p par analogie avec le second membre éventuellement en utilisant le principe de superposition.
On connaît 2 règles précisant la forme de y_p où on note (EC) : $ar^2+br+c=0$ l'équation caractéristique.

– $\boxed{\text{si } d(x)=\text{C}e^{mx} \text{ où } \text{C}\in\mathbb{R}}$ alors

si m n'est pas racine de (EC) , on recherche y_p sous la forme $y_p(x)=ke^{mx}$ avec k à déterminer
si m est racine simple de (EC) , on recherche y_p sous la forme $y_p(x)=kxe^{mx}$ avec k à déterminer
si m est racine double de (EC) , on recherche y_p sous la forme $y_p(x)=kx^2e^{mx}$ avec k à déterminer

– $\boxed{\text{si } d(x)=\text{C}\cos(\omega x)=\Re e\left(\text{C}e^{i\omega x}\right) \text{ (resp. } d(x)=\text{C}\sin(\omega x)=\Im m\left(\text{C}e^{i\omega x}\right))}$ alors

si $m=i\omega$ n'est pas racine de (EC) , on cherche y_p sous la forme

$y_p(x)=\Re e\left(ke^{i\omega x}\right)=\alpha\cos(\omega x)+\beta\sin(\omega x)$ où $k\in\mathbb{C}/(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ sont à déterminer

(resp. $y_p(x)=\Im m\left(ke^{i\omega x}\right)=\alpha\cos(\omega x)+\beta\sin(\omega x)$ où $k\in\mathbb{C}/(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ sont à déterminer)

si $m=i\omega$ est racine simple de (EC) , on recherche y_p sous la forme

$y_p(x)=\Re e\left(kxe^{i\omega x}\right)=\alpha x\cos(\omega x)+\beta x\sin(\omega x)$ où $k\in\mathbb{C}$ / $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ sont à déterminer

(resp. $y_p(x)=\Im m\left(kxe^{i\omega x}\right)=\alpha x\cos(\omega x)+\beta x\sin(\omega x)$ où $k\in\mathbb{C}/(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ sont à déterminer)

si $m=i\omega$ est racine double de (EC) , on recherche y_p sous la forme

$y_p(x)=\Re e\left(kx^2e^{i\omega x}\right)=\alpha x^2\cos(\omega x)+\beta x^2\sin(\omega x)$ où $k\in\mathbb{C}/(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ sont à déterminer

(resp. $y_p(x)=\Im m\left(kx^2e^{i\omega x}\right)=\alpha x^2\cos(\omega x)+\beta x^2\sin(\omega x)$ où $k\in\mathbb{C}/(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ sont à déterminer)

- Méthode de Lagrange/d'abaissement de l'ordre pour les équations différentielles linéaires du second ordre.

On considère une équation différentielle scalaire linéaire d'ordre 2 à résoudre sur l'intervalle I

$$(\text{E}): \; y''+a(t)y'+b(t)y=c(t) \quad \text{où } a,b,c:\text{I}\subset\mathbb{R}\to\mathbb{K} \text{ sont } \text{C}^0 \text{ sur l'intervalle I}$$

n sait, bien souvent, obtenir une solution homogène h de (E) à l'aide de techniques usuelles (avec bien souvent une indication du sujet) en cherchant les solutions sous une forme particulière (forme exponentielle, polynômiale ou développable en série entière)

Si cette solution h ne s'annule pas sur I alors on peut utiliser la technique de l'abaissement de l'ordre (dite de Lagrange),
on cherche les solutions sous la forme $y=h\times z$ avec z supposée deux fois dérivables sur I

On a : $\begin{cases} y=h\times z & (\times b(t)) \\ y'=h'z+hz' & (\times a(t)) \\ y''=h''z+2h'z'+hz'' & (\times 1)\end{cases}$ et on recherche une EDL_1 vérifiée par $\text{Y}=z'$:

$$\begin{aligned} y''+a(t)y'+b(t)y=c(t) &\Leftrightarrow h''z+2h'z'+hz''+a(t)((h'z+hz')+b(t)hz=c(t) \\ &\Leftrightarrow \underbrace{(h''+a(t)h'+b(t)h)}_{=0}z+hz''+(2h'+a(t)h)z'=c(t) \\ &\Leftrightarrow z' \text{ est solution de } \; h\text{Y}'+(2h'+a(t)h)\text{Y}=c(t) \quad (\text{EDL}_1 \text{ résolue en } \text{Y}' \text{ car } h \text{ ne s'annule pas}) \end{aligned}$$

On détermine enfin z en intégrant z' qu'on a obtenu comme solution de l'EDL_1 résolue en Y'