Questions de cours possibles sur la semaine n° 11 et 12

1. Bilan sur les séries numériques en PT

- Convergence, somme partielle somme et reste d'ordre n

• La série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ converge si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ convergent (où $S_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$)

• La limite est alors appelée la somme de la série et on note : $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

• On appelle reste d'ordre n de la série convergente $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ le réel $R_n = \sum\limits_{k=n_0}^{+\infty} u_k - \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et on a : $R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

- Divergence grossière et convergence absolue d'une série et lien entre ces notions et celle de convergence de la série

• Si la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ converge alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Dans le cas contraire, on dit que la série diverge grossièrement.

• La série $\sum u_n$ converge absolument (CVA) lorsque $\sum |u_n|$ converge.

• On sait que : $\sum u_n$ CVA $\Rightarrow \sum u_n$ CV **Attention**! Réciproque fausse. Contre-ex : $\sum\limits_{n\geqslant1} \frac{(-1)^n}{n}$

et : $\sum u_n$ CV $\Rightarrow u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (soit $\sum u_n$ ne diverge pas grossièrement) ou encore, par contraposée : $\sum u_n$ DVG $\Rightarrow \sum u_n$ DV

- Séries de références en PT

• La série télescopique $\sum\limits_{n\geqslant n_0} (a_{n+1} - a_n)$ a même nature que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si elle converge, sa somme est $S = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n - a_{n_0}$

• La série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant n_0} q^n$ converge(absolument) si et seulement si $|q| < 1$ et, dans ce cas, sa somme vaut : $S = q^{n_0} \times \frac{1-0}{1-q}$

• Les séries de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge (absolument) si et seulement si $\alpha > 1$ (encadrement de la somme par comparaison série/intégrale)

• La série de l'exponentielle $\sum\limits_{n\geqslant0} \frac{z^n}{n!}$ converge (absolument) pour tout $z \in \mathbb{C}$ et : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$

- Séries à termes de signe constant

Si une série $\sum u_n$ est à termes de signe constant alors la suite des sommes partielles est monotone.

Si $u_n \geqslant 0$ alors (S_n) est croissante. Dès lors, en vertu du théorème de convergence monotone :

soit (S_n) est majorée et alors $\sum u_n$ converge soit $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Si $u_n \leqslant 0$ alors (S_n) est décroissante. Dès lors, en vertu du théorème de convergence monotone :

soit (S_n) est minorée et alors $\sum u_n$ converge soit $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$

- Énoncer les théorèmes de comparaison pour les séries.

• $\left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant u_n \leqslant v_n \text{ à partir d'un certain rang} \\ \sum v_n \text{ CV} \end{array}\right. \Rightarrow \sum u_n$ CV (majoration)

• $\left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant u_n \leqslant v_n \text{ à partir d'un certain rang} \\ \sum u_n \text{DV} \end{array}\right. \Rightarrow \sum v_n$ DV (minoration)

• $u_n \sim v_n > 0 \Rightarrow \sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature (critère d'équivalence)

Attention! Les sommes des séries ne sont pas égales!

On a aussi : Si $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ converge absolument (CVA) $\Leftrightarrow \sum v_n$ converge absolument (CVA)

• $\left\{\begin{array}{l} u_n = O(v_n) \text{ (donc aussi } u_n = o(v_n)) \\ \sum v_n \text{ converge absolument (CVA)} \end{array}\right. \Rightarrow \sum u_n$ CVA (régle du O ou du o)

- Somme de séries convergente et inégalité triangulaire

• On ne peut écrire $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} v_n$ que si on sait que 2 (au moins) des trois séries convergent.

• Si la série $\sum u_n$ converge absolument, $\left|\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|$

- Règle de d'Alembert

Soit $\sum u_n$ une série à terme non nuls avec $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in [0,\infty[$ alors

- si $\ell > 1$ (y compris $+\infty$), $\sum u_n$ DV (grossièrement) - si $\ell < 1$, $\sum u_n$ CVA - si $\ell = 1$, on ne peut rien conclure

- Connaissance sur le produit de Cauchy de deux séries numériques

• Le produit de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série $\sum w_n$ où $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

• Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ converge <u>absolument</u> toutes les deux alors le produit de Cauchy $\sum w_n$ CVA et on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$

- Connaissance sur le théorème des séries alternées

Si $u_n = (-1)^n v_n$ où $v_n > 0$ (autrement dit $v_n = |u_n|$) avec la suite (v_n) qui tend vers 0 en décroissant alors $\sum u_n$ converge

Lorsque la convergence est obtenue à l'aide du théorème des séries alternées,
-la somme de la série est alors toujours comprise entre deux sommes partielles consécutives.

-on a une majoration du reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$: $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$

2. Polynômes (Bilan PTSI)

- Énoncé du théorème de division euclidienne

Si $B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$ alors $\exists!(Q,R) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$, $A = BQ + R$ avec $\deg R < \deg B$

- Connaissances sur les racines d'un polynôme non nul de degré n

$a \in \mathbb{K}$ est une racine de $P \in \mathbb{K}[X]$ lorsque $P(a) = 0 \Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{K}[X]$, $P = (X-a)Q$

$a \in \mathbb{K}$ est une racine de multiplicité $k \in [\![1,n]\!]$ lorsque
$$P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(k-1)}(a) = 0 \text{ et } P^{(k)}(a) \neq 0 \Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{K}[X],\ P = (X-a)^k Q \text{ et } Q(a) \neq 0$$

Un polynôme non nul de degré n admet au plus n racines distinctes ainsi, si un polynôme a plus de racines distinctes que son degré (par exemple il a une infinité de racines distinctes), alors il est nul.

- Forme scindée d'un polynôme et théorème de d'Alembert-Gauss

Un polynôme est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ lorsqu'il s'écrit comme un produit de polynômes de $\mathbb{K}_1[X]$ (càd de degré $\leqslant 1$)

Les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont scindés :
$$\forall P \in \mathbb{C}[X],\ P = a\prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k) \text{ avec } \begin{cases} a \in \mathbb{K} \\ (\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^n \text{non nécessairement distincts} \end{cases}$$
Ou encore : un polynôme non nul de degré n dans $\mathbb{C}[X]$ admet n racines dans $\mathbb{C}$ (comptées avec multiplicité)

- Théorème de décomposition en facteurs irréductibles

Un polynôme P est irréductible lorsque les diviseurs de P sont soit constants soit associés à P
autrement dit : si Q divise P alors $\exists \alpha \in \mathbb{K}$, $Q = \alpha$ ou $Q = \alpha P$

Dans $\mathbb{C}[X]$, les polynômes irréductibles sont ceux de degré 1.
Tout polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$ de degré n s'écrit sous la forme d'un produit de polynômes irréductibles :
$$a_n \prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k) \quad \text{avec} \begin{cases} a_n \neq 0 \text{ est le coefficient dominant} \\ \alpha_1,\dots,\alpha_n \text{ les racines complexes (non distinctes)} \end{cases}$$

Dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes irréductibles sont ceux de degré 1 et ceux de degré 2 à discriminant négatif.
Tout polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$ de degré n s'écrit sous la forme d'un produit de polynômes irréductibles :
$$a_n \prod_{k=1}^{p}(X-\alpha_k)\prod_{j=1}^{q}(X^2+b_jX+c_j) \quad \text{où} \begin{cases} a_n \neq 0 \text{ est le coefficient dominant} \\ \alpha_1,\dots,\alpha_p \text{ les racines réelles (non distinctes)} \\ b_j, c_j \text{ sont réels avec } b_j^2 - 4c_j < 0 \text{ pour } j \in [\![1,q]\!] \end{cases} \quad \text{et avec } p+2q = n$$