EXERCICES SUR LE CHAPITRE IX : ESPACES PRÉHILBERTIENS ET EUCLIDIENS

Exemples du cours

Produits scalaires étudiés en classe

- Le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$: $\langle x, y\rangle = X^T Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$
- Le produit scalaire usuel sur $\ell_2(\mathbb{N}) = \left\{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum u_n^2 \text{ converge}\right\}$ $\langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$
- Le produit scalaire usuel de $C^0([a,b],\mathbb{R})$: $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$
- Le produit scalaire sur $L_2(I,\mathbb{R}) = \left\{f \in C^0(I,\mathbb{R}) \mid f^2 \text{ est intégrable sur } I\right\}$: $\langle f, g\rangle = \int_I f(t)g(t)\,dt$
- Les produits scalaires sur $\mathbb{R}_n[X]$: $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$ et $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ où $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$
- Le produit scalaire usuel de $M_n(\mathbb{R})$ $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} [A]_{ij}[B]_{ij}$ où on note $[M]_{ij}$ le coefficient ligne i, colonne j de la matrice M

EXEMPLE N° 1 Montrer que, pour toute fonction f à valeurs réelles de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $f(0) = 0$ alors:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^2(x) \leqslant x\int_0^x f'^2(t)\,dt$$

On pourra utiliser le produit scalaire usuel sur $C^0([\min(0,x),\max(0,x)])$

EXEMPLE N° 2 Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien $(E, \langle .,. \rangle)$,
Montrer que: $F \oplus F^\perp = E \Rightarrow (F^\perp)^\perp = F$ *Cela sera en particulier vérifié si* F *est de dimension finie*

EXEMPLE N° 3 On munit $M_2(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$
Déterminer l'orthogonal de l'ensemble D des matrices diagonales

EXEMPLE N° 4 On considère $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on définit $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$

1. Justifier que $(E, \langle .,. \rangle)$ est un espace euclidien.
2. Si $n = 3$, démontrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid X(X-1) \text{ divise } P\}$ et $G = \mathrm{Vect}(X^2 - 5X + 6)$ sont des sev orthogonaux.
3. On considère la famille des polynômes de Lagrange: $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $L_i = \prod_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \neq i}} \frac{X-k}{i-k}$

   Justifier que $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ est une base orthonormée de E

EXEMPLE N° 9/2
1) Déterminer une base orthonormée de l'hyperplan H de $\mathbb{R}^4$ d'équation $x + y + z - t = 0$
2) Calculer la distance de $a = (1,0,0,0)$ à H.
3) Expliciter $H^\perp$. Proposer une autre méthode pour calculer $d(a, H)$.
4) Proposer une troisième méthode pour calculer $p(a)$ sans utiliser la base orthonormée de Q1)

EXEMPLE N° 5 Dans l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^4$, on considère le sev F d'équation $\begin{cases} x + y - z - t = 0 \\ x + 3y + z - t = 0 \end{cases}$.
Déterminer la matrice canoniquement associée à la projection orthogonal sur F.

EXEMPLE N° 6 Déterminer $\inf\left\{\int_0^\pi (t - a\cos t - b\sin t)^2\,dt \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$

Exercices

EXERCICE N° 1 On considère l'espace $\mathrm{E} = \left\{f \in \mathrm{C}^0\big([0,+\infty[,\mathbb{R}\big) \mid f^2 \text{ est intégrable sur } [0,+\infty[\right\}$

On rappelle, dans cette exercice, que, pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $|ab| \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$.

1. Démontrer que E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel

2. Prouver que $(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E

3. Démontrer que: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

EXERCICE N° 2 On appelle E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 sur $[0,1]$ à valeurs réelles: $\mathrm{E} = \mathrm{C}^2([0,1],\mathbb{R})$

1. Montrer que $\langle f,g\rangle = \displaystyle\int_0^1 \big(f(t)g(t)+f'(t)g'(t)\big)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.

2. Déterminer la distance entre la fonction carrée et le sev $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$ dans cet espace euclidien.
où bien sûr on assimile un polynôme à la fonction polynômiale associée.

3. Prouver que $\mathrm{F} = \left\{f \in \mathrm{E} \mid f(0) = f(1) = 0\right\}$ et $\mathrm{G} = \left\{f \in \mathrm{E} \mid f'' = f\right\}$ sont des supplémentaires orthogonaux pour ce produit scalaire.

4. Préciser le projeté orthogonal d'une application h de E sur G

EXERCICE N° 3 Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ usuel,
déterminer la distance de $(1,0,\dots,0)$ à $\mathrm{H} = \left\{(x_1,\dots,x_n) \mid x_1 + x_n = 0\right\}$

EXERCICE N° 4 Soit $(\mathrm{E},\langle .,.\rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$.
On dit qu'un endomorphisme est antisymétrique quand : $\forall x \in \mathrm{E}, \forall y \in \mathrm{E}, \ \langle f(x),y\rangle = -\langle x,f(y)\rangle$

1. On note $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de E et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Justifier que, pour $j \in [\![1,n]\!]$, $f(e_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle f(e_j),e_i\rangle\, e_i$

En déduire que la matrice d'un endomorphisme antisymétrique dans une base orthonormée est une matrice antisymétrique.

2. Montrer qu'un endomorphisme f est antisymétrique si et seulement si $\langle f(x),x\rangle = 0$ pour tout x de E

3. Soit f un endomorphisme antisymétrique, montrer que $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont des supplémentaires orthogonaux.

4. On suppose désormais que f est un endomorphisme antisymétrique et que $n = 3$.

a. Justifier que f admet au moins une valeur propre réelle qui ne peut valoir que 0.

b. Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$