EXEMPLES DU COURS SUR LE CHAPITRE VIII

EXEMPLE N° 1 Déterminer et représenter l'ensemble de définition et expliciter les applications partielles

$$f_1(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}\qquad f_2(x,y)=\frac{\sqrt{x+y}}{x^2y}\qquad f_3(x,y)=\ln(1-x^2-y^2)\qquad f_4(x,y)=\operatorname{Arcsin}\left(\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)$$

Un contre-exemple

$\left[f_1:(x,y)\mapsto\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right]$ n'a pas de limite en $(0,0)$ bien que ses applications partielles ont des limites en $t=0$.

En imposant $f_1(0,0)=0$, f_1 est donc un exemple d'application ayant des applications partielles continue sur $\mathbb{R}$ sans toutefois que f_1 ne soit une application C^0 sur $\mathbb{R}^2$. L'application f_1 possède même des dérivées partielles définie sur $\mathbb{R}^2$ alors qu'elle n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$. Cette fonction est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ mais elle n'est pas de classe C^1 au voisinage de $(0,0)$.

SUITE EXEMPLE N° 1 Justifier la continuité des applications de l'exemple 1 sur leurs domaines de définition

EXEMPLE N° 2 Étudions la continuité des applications suivantes : $g(0,0)=h(0,0)=0$ et, pour $(x,y)\neq(0,0)$:

$$g(x,y)=\frac{\sqrt{|x|+|y|}}{x^2+|y|}\quad\text{et}\quad h(x,y)=\frac{x^3y}{x^6+y^2}$$

1. Justifier la continuité de g et h sur $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$

2. En examinant la limite $\lim\limits_{t\to0}g(0,t)$, conclure sur la continuité de g en $(0,0)$.

3. a. Justifier que les applications partielles de h sont continues en $(0,0)$.

b. Déterminer $\lim\limits_{t\to0}h(t,t^3)$. La fonction h est-elle continue en $(0,0)$?

EXEMPLE N° 3 Étudier la continuité de f définie sur $\mathbb{R}^2$ par l'expression $f(x,y)$ (si elle n'existe pas $f(x,y)=0$) :

$$1)\ f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}\qquad 2)\ f(x,y)=\frac{(x-1)(y+1)^3}{(x-1)^2+(y+1)^2}\qquad 3)\ f(x,y)=\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

EXEMPLE N° 4

1. Déterminer les applications dérivées partielles de f si $f(x,y,z)=xyz^2$

2. Étudier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et de $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

a) $f(x,y)=\dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et 0 sinon b) $f(x,y)=(x^2+y)\ln(x^2+y^2)$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et 0 sinon

EXEMPLE N° 5 Préciser si f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ lorsque

1) $f(x,y)=\dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $f(0,0)=0$ 2) $f(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et 0 sinon

Pour 2), on pourra écrire $(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ *et remarquer que* $(x,y)\to(0,0)\Leftrightarrow r\to0$

EXEMPLE N° 6 Justifier que $[f:(x,y)\mapsto\cos(xy)]$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer les dérivées partielles seconde.

EXEMPLE N° 7 On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$f(x,y)=0\text{ si }xy=0\qquad\text{et}\qquad f(x,y)=x^2\operatorname{Arctan}\frac{y}{x}-y^2\operatorname{Arctan}\frac{x}{y}\text{ si }xy\neq0$$

1. Montrer que f est admet des dérivées partielles à l'ordre 1 sur $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que f n'est pas C^2 sur $\mathbb{R}^2$. On pourra comparer les dérivées croisées en $(0,0)$.

EXEMPLE N° 8 On considère $\left[\begin{array}{ccc} f:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3\\ (u,v) & \mapsto & \left(u,v,ue^v\right)\end{array}\right]$

1. Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et préciser ces dérivées partielles.

2. Justifier l'existence et déterminer les dérivées partielles secondes.

EXEMPLE N° 9 Soit une fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, justifier que g où $g(x,y) = f(x^2y, x+xy)$ est aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles à l'aide de celles de f.

EXEMPLE N° 10 **Un grand classique !**

Pour $[f : (x,y) \mapsto f(x,y)]$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, on pose $g(r,\theta) = f(r\cos\theta; r\sin\theta)$.
Prouver que g est C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer les dérivées premières et secondes de g à l'aide des dérivées de f

EXEMPLE N° 11 Déterminer les fonctions réelles (définies sur $\mathbb{R}^2$ sauf pour Q9 où f définie sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$) vérifiant:

$$1)\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \quad 2)\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x \quad 3)\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2f(x,y)$$

$$4)\ \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy+1 \end{pmatrix} \quad 5)\ \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} \quad 6)\ \nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2zx+y^2 \\ 2xy+z^2 \\ 2yz+x^2 \end{pmatrix}$$

$$7)\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0 \quad 8)\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = x+y \quad 9)\ 2y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

EXEMPLE N° 12 En utilisant le changement de variable proposé, résoudre sur l'ouvert $\mathcal{U}$ l'équation

1. $x\dfrac{\partial f}{\partial y} - y\dfrac{\partial f}{\partial x} = f$ où f est C^1 sur $\mathcal{U} =]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ en passant en coordonnées polaires

2. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0$ avec f de classe C^2 sur $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$ en posant $\begin{cases} u = x - cy \\ v = x + cy \end{cases}$ *(É quation des cordes vibrantes)*

3. (E) : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial f}{\partial x} - 4x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ avec f de classe C^2 sur $\mathcal{U} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ en posant $u = x^2 - y$ et $v = x^2 + y$

EXERCICE DU COURS SUR LE CHAPITRE VIII

EXERCICE N° 1 On considère l'application f d'expression $f(x,y) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

1. Justifier que f est une application continue sur son domaine de définition.

2. En utilisant les applications partielles de f déterminer l'unique valeur possible de $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ en admettant que cette limite existe.

3. On définit $f(0,0) = 0$. Justifier que f est alors continue sur $\mathbb{R}^2$.

4. Étudier l'existence des dérivées partielles du premier ordre de f en $(0,0)$.

EXERCICE N° 2 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \in \mathcal{U} = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

1. Justifier que f admet un prolongement continue sur $\mathbb{R}^2$ en précisant la valeur de $f(0,0)$ adéquate.

2. La fonction f ainsi prolongée est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

3. Justifier l'existence et déterminer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.

La fonction f ainsi prolongée est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

EXERCICE N° 3 Si $[f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}]$ est de classe C^1, calculer les dérivées partielles de g à l'aide de celles de f lorsque

1) $g(x,y) = f(x^2, xy)$ 2) $g(x,y) = xf(xy, x^2)$ 3) $g(x,y) = f\big(f(y,y), x\big)$