EXEMPLE DU COURS SUR LE CHAPITRE VII

EXEMPLE 0.5 : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n}} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \sqrt{k}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \prod\limits_{k=1}^{n} (n+k)^{\frac{1}{n}}$

EXEMPLES DE RÉFÉRENCE :

- Existence et valeur éventuelle de : $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$
- $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t = -1$
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 0$ et alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$ et alors : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$
- $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha < 1$ et alors : $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$
- Convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^1 t\ln t\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ converge mais $\left[f : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}\right]$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$

EXEMPLE : Justifier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction h définie par $h(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.
Déterminer $h'(x)$ pour x réel puis $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

EXEMPLE N° 1 Convergence et calcul de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(t)+i}{1+t^2}\mathrm{d}t$

EXEMPLE N° 2 Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\int_6^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2-9t+20}$

EXEMPLE N° 3 Préciser la nature de 1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{2+t^3}\,dt$ 2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\sqrt{t}}{t}\mathrm{d}t$ 3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^3}\mathrm{d}t$ *(Comparer* $\ln t$ *et* t*)*
(Pour le 3, proposer 2 arguments différents)

EXEMPLE N° 4 Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_2^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$ à l'aide d'intégrations par parties

EXEMPLE N° 5 Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{1+x^8}\mathrm{d}x$

EXEMPLE N° 6 Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tan x)^\alpha \mathrm{d}x$ suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$.

EXEMPLE N° 7 Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)\ln(1+t)}{t^2\sqrt{1+t^3}}\mathrm{d}t$

EXEMPLE N° 8 Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}\mathrm{d}t$. On rappelle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

EXEMPLE N° 9 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(t) = e^{-nt} - 2e^{-2nt}$ pour $t > 0$
Montrer que les deux expressions suivantes existent mais que leurs valeurs différent :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} u_n(t)\mathrm{d}t\right) \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)\right)\mathrm{d}t$$

EXERCICES SUR LE CHAPITRE VII

EXERCICE N° 1 Établir la nature des intégrales suivantes :

$$\mathrm{I}_1 = \int_1^{+\infty} \sqrt{t}\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t \qquad \mathrm{I}_2 = \int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)}{1+x^2}\mathrm{d}x, \qquad \mathrm{I}_3 = \int_0^{+\infty}\left(\sqrt{t^2+4t+5}-t\right)\mathrm{d}t \qquad \mathrm{I}_4 = \int_0^{+\infty}(\ln t)e^{-t}\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{I}_5 = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{sh}(t)-\mathrm{Arctan}(t)}{(\sqrt{t})^7}\mathrm{d}t \qquad \mathrm{I}_6 = \int_0^{+\infty} t^a(1-e^{-\frac{1}{\sqrt{t}}})\mathrm{d}t \text{ où } a \text{ est un paramètre réel}$$

EXERCICE N° 2 Établir la convergence et donner la valeur des intégrales

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \qquad \mathrm{J} = \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{(1+t)^2}\mathrm{d}t \qquad \mathrm{K} = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

EXERCICE N° 3 On considère la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ où $\quad u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t}(-e^{-t})^n\mathrm{d}t$

1. Démontrer que, pour $t \geqslant 0$: $\quad \ln(1+t) \leqslant t$

2. Justifier la définition de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$

3. Prouver que cette série ne diverge pas grossièrement.

4. Démontrer que cette série converge. *On ne demande pas la valeur de la somme*

EXERCICE N° 4 On considère l'intégrale $\quad \mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{Arctan}\,x - \pi}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

1. Justifier la convergence de I.

2. Prouver que : $\mathrm{I} = -\int_0^{+\infty} \frac{2\sqrt{x}\mathrm{d}x}{1+x^2}$

3. Calculer alors I à l'aide d'un changement de variables sachant que $\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

EXERCICE N° 5

1. La fonction $\left[f : t \mapsto \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}\,\mathrm{ch}(t)}\right]$ est-elle intégrable sur $\mathrm{I} =]0, +\infty[$?

2. a. Pour m un nombre réel, la fonction $[\varphi : t \mapsto e^{-t^2+imt}]$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$?

b. Que peut-on en déduire pour les intégrales $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\cos(t)\mathrm{d}t$ et $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\sin(t)\mathrm{d}t$?

EXERCICE N° 6 **Voir DM n°5**

EXERCICE N° 7 On rappelle que $\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

1. Pour $x \in]0,1[$, justifier que $\quad \frac{x^2\ln x}{x^2-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-\ln x)x^{2n+2}$

2. En déduire l'existence et la valeur de $\int_0^1 \frac{x^2\ln x}{x^2-1}\mathrm{d}x$

EXERCICE N° 8 Démontrer que $\quad \int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$