EXEMPLE DU COURS SUR LE CHAPITRE VI

EXEMPLE N° 1 On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans $M_2(\mathbb{R})$
On définit l'application f qui à une matrice M de $M_2(\mathbb{R})$ associe $f(M) = AMB$.
Vérifier que f est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$ et préciser ses valeurs propres et ses espaces propres.

EXEMPLE N° 3/2 Soit l'endomorphisme f de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui à la suite $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ associe la suite $v = (v_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $\begin{cases} v_0 = u_0 \\ \forall n \geqslant 1,\ v_n = \dfrac{u_n + u_{n-1}}{2} \end{cases}$. Déterminer les éléments propres de f

SUITE EXEMPLE N° 1 Retrouver le spectre de f à l'aide du polynôme caractéristique.

EXEMPLE N° 2 Déterminer, suivant les valeurs $\alpha \in \mathbb{R}$,les valeurs propres et la multiplicité pour $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 0 & 2 & -\alpha \\ 1 & 1 & 2-\alpha \end{pmatrix}$

SUITE EXEMPLE N° 2 Pour quelles valeurs du réel α, la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 0 & 2 & -\alpha \\ 1 & 1 & 2-\alpha \end{pmatrix}$ est diagonalisable ?

EXEMPLE N° 3 La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & n & \dots & n \\ n & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n \\ n & \dots & n & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ où $n \geqslant 2$ est-elle diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$?

Calculer le rang de la matrice $A + nI_n$

EXEMPLE N° 4 Réduire la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

EXEMPLE N° 5 Montrer que $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & -6 & -4 \end{pmatrix}$ est semblable à $T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$ où λ et μ sont des réels.

EXEMPLE N° 6

Les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ? Si oui, expliciter la relation de similitude.

Même question avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

SUITE EXEMPLE N° 4

1. Calculer les puissances itérées de A où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ en utilisant une réduction de A

2. Retrouver le résultat en remarquant que $\chi_A(A) = 0$ et en utilisant une division euclidienne de X^n par χ_A

3. Déterminer alors les expressions du terme général de (u_n) et (v_n) lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 3v_n \end{cases} \text{avec} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

EXERCICES SUR LE CHAPITRE VI

EXERCICE N° 1 Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? Si oui, les diagonaliser.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Examinez $B + 3I_3$

EXERCICE N° 2 Soit la matrice $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le rang de $G - I_3$.
En déduire le spectre de G et la polynôme caractéristique de G sans aucun calcul de déterminant

2. Calculer $G\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. En déduire une base de chacun des sous-espace propre de G

3. La matrice G est-elle diagonalisable? Si oui, la diagonaliser.

EXERCICE N° 3 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ où $n \in \mathbb{N}^*$ telle que $A^2 = -I_n$

1. Si λ est une valeur propre complexe de A, établir que $\lambda^2 + 1 = 0$

2. Démontrer alors que: n est pair, $\mathrm{tr}(A) = 0$ et $\det(A) = 1$

EXERCICE N° 4 Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$ et $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{R})$ telle que : $a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i + j = n+1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

1. Déterminer A et A^2

2. En déduire les valeurs propres de A sans aucun calcul de déterminant.

3. Déterminer le polynôme caractéristique de A sans aucun calcul de déterminant.

4. La matrice A est-elle diagonalisable?

EXERCICE N° 5 Déterminer l'expression du terme général des suites $(u_n), (v_n)$ et (w_n) vérifiant:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = -(v_n + w_n) \\ v_{n+1} = -2v_n - 3w_n \\ w_{n+1} = -2v_n - w_n \end{cases} \quad \text{avec} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

EXERCICE N° 6 On considère un système différentiel $(S) : \begin{cases} x' = y \\ y' = z \\ z' = -4x + 3z \end{cases}$ où x, y, z sont des fonctions inconnues de la variable réelle t supposées dérivables sur $\mathbb{R}$ qu'on écrit, à l'aide d'une matrice, sous la forme :

$$X' = AX \quad \text{où} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable?

2. Montrer que A est semblable à une matrice $T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ avec α et β des réel à préciser.
Préciser la matrice de passage P (il n'est pas nécessaire d'expliciter P^{-1})

3. Résoudre le système différentiel $Y' = TY$ d'inconnues $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des fonctions inconnues supposées dérivables sur $\mathbb{R}$

4. En déduire l'ensemble des solutions de (S) en utilisant le changement de bases : $X = PY$.
Puisque P *est une matrice à coefficients constants, on pourra admettre que* $Y' = (PX)' = PX'$

EXERCICE N° 7 *D'après sujet B, banque PT 2018*

Pour $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, on définit $g_{a,b}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui, au vecteur $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ d'affixe $z = x + iy$, associe le vecteur $g_{a,b}(u)$ de $\mathbb{R}^2$ d'affixe $f_{a,b}(z) = az + b\overline{z}$. La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est notée (e_1, e_2).

1. Démontrer qu'on a bien $g_{a,b} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$.

2. Écrire la matrice $\mathrm{G}_{a,b}$ de $g_{a,b}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$

3. **(Pour les 5/2 pour l'instant)** On suppose dans cette question uniquement que $a \in \mathbb{R}$.
La matrice $\mathrm{G}_{a,b}$ est-elle diagonalisable dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$? Que dire de plus sur ses sous-espace propres ?

4. **a.** Déterminer le polynôme caractéristique de $\mathrm{G}_{a,b}$.

b. On suppose que $|b|^2 \neq (\Im m(a))^2$. La matrice $\mathrm{G}_{a,b}$ est-elle diagonalisable dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$?
Est-elle diagonalisable dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$? Discuter en fonction de a et b.

c. On suppose que $|b|^2 = (\Im m(a))^2$.
Démontrer que $\mathrm{G}_{a,b}$ est diagonalisable dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $a \in \mathbb{R}$ et $b = 0$.

d. A quelle(s) condition(s), $g_{a,b}$ est-il diagonalisable ?

EXERCICE N° 8 *Réduction simultanée (d'après sujet A, banque PT 2012 librement adapté à partir de 2e)*

1. *Question préliminaire*
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$.
Si λ est une valeur propre de f, démontrer que $\mathrm{E}_\lambda(f)$, le sous-espace propre de f associé à λ, est stable par g.

2. Soient f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont respectivement

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a. Montrer que f et g commutent.

b. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f et g.
Les matrices A et B sont-elle diagonalisables ? trigonalisables ?

c. On note e_1 un vecteur propre de g associé à la valeur propre 2. En utilisant la question préliminaire, déterminer un vecteur e_2 non colinéaire à e_1 tel que le sous-espace $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ soit stable par f et par g.

d. En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont triangulaires supérieures.

e. On choisit e_1 et e_2 avec $e_1 = (?;-1;?)$ et $e_2 = (1,?,?)$ où ? est un coefficient inconnu. Déterminer un vecteur e_3 tel que, dans la base $\mathscr{B}' = (e_1, e_2, e_3)$, les matrice de f et g sont respectivement $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. On considère désormais la matrice C qui a les mêmes coefficients que B sauf le coefficients ligne 1 colonne 1 qui vaut 3 on appelle h l'endomorphisme canoniquement associé à C.

a. Démontrer que h est diagonalisable. *On pourra adapter les calculs faits pour* B

b. Préciser une base $\mathscr{B}'' = (v_1, v_2, v_3)$ dans laquelle la matrice de h est $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

c. Le commutant $\mathscr{K}$ de h est l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ qui commutent avec h autrement dit

$$\mathscr{K} = \left\{ \varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3) \mid h \circ \varphi = \varphi \circ h \right\}$$

i. Démontrer que $\mathscr{K}$ est espace vectoriel.

ii. Pour $\varphi \in \mathscr{K}$, en utilisant la question préliminaire, justifier que :

$$\exists (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) \in \mathbb{R}^5, \quad \varphi(v_1) = \alpha v_1, \quad \varphi(v_2) = \beta v_2 + \gamma v_3 \quad \text{et} \quad \varphi(v_3) = \delta v_2 + \varepsilon v_3$$

Préciser alors les matrices M de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{MD} = \mathrm{DM}$.

iii. En déduire la dimension de $\mathscr{K}$.