

EXEMPLES DU COURS SUR LE CHAPITRE V

EXEMPLE N° 1 On considère l'équation différentielle (E) : $|t|y' - y = t^2$

1. Résoudre (E) sur un intervalle J inclus dans \mathbb{R}^*
2. Résoudre (E) sur \mathbb{R}

EXEMPLE N° 2 On considère l'équation différentielle (E) : $xy' - y = 1 + x^2 \cos x$

1. Résoudre (E) sur un intervalle J inclus dans \mathbb{R}^*
2. Résoudre (E) sur \mathbb{R}

EXEMPLE N° 3 On considère l'équation différentielle (E) : $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 6$

1. Déterminer une solution particulière de (E) évidente.
2. Déterminer les solutions polynômiales de l'équation homogène associée à (E)
3. Résoudre (E) sur \mathbb{R}

EXEMPLE N° 4 On considère l'équation différentielle $(1 + x^2)y'' + xy' - y = 0$

1. Identifier les solutions polynômiales
2. Calculer, quand c'est possible, la dérivée de F où $F(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$
3. Résoudre alors l'équation $(1 + x^2)y'' + xy' - y = 0$ sur \mathbb{R}

EXEMPLE N° 5

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle: (E) : $(1 + t^2)^2 y'' + 2t(1 + t^2)y' + y = \frac{1}{1 + t^2}$ en posant $t = \tan x$

EXERCICES SUR LE CHAPITRE V

EXERCICE N° 1

1. Résoudre l'équation différentielle $ty' + |t|y = t^2 e^{-|t|}$ sur \mathbb{R}
2. Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} (1+t)^3 y' + 2(1+t)^2 y = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ sur le plus grand intervalle I de \mathbb{R} possible.

EXERCICE N° 2 Résoudre l'équation différentielle $(E_m) : y'' - 2my' + (m^2 + 1)y = e^x \sin x$ où $m \in \mathbb{R}$ est fixé.

EXERCICE N° 3 Résoudre l'équation (E) : $\begin{vmatrix} y'' & y' & y \\ 2 \cos(2x) & \sin(2x) & \sin^2 x \\ -\cos x & -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 0$ là où elle est résolue en y''

EXERCICE N° 4 On considère l'équation (E) : $t^2 y'' - ty' + y = 1 - \ln(t)$ à résoudre sur $]0, +\infty[$.

1. Déterminer une solution de l'équation homogène sous la forme $[t \mapsto t^\alpha]$ où α est un réel à déterminer.
2. En déduire la solution générale de cette équation (E).
3. Déterminer l'unique solution f de (E) telle que $f(1) = f'(1) = 0$

EXERCICE N° 5 On considère l'équation différentielle (E) : $t^2 y'' + ty' - 9y = 5t^2 - 9$

1. Chercher les solutions homogènes polynômiales de (E) sur \mathbb{R}
2. Chercher une solution particulière polynômiale de (E) sur \mathbb{R}
3. Résoudre (E) sur un intervalle I inclus dans \mathbb{R}^* .
4. Résoudre (E) sur \mathbb{R} .

EXERCICE N° 6 Résoudre l'équation (E) : $(1 + x^2)^2 y'' + 2(x - 1)(1 + x^2)y' + y = 0$ en posant $t = \text{Arctan } x$