EXEMPLE DU COURS SUR LE CHAPITRE V

EXEMPLE N° 1 a et b sont des paramètre réels avec $ab \neq 0$

1. Donner un point et un vecteur directeur de la droite $\Delta:\ bx + ay - 2ab = 0$
2. Donner le centre et le rayon du cercle $\mathscr{C}:\ x^2 + y^2 - 2(a+b)(x+y) + 8ab = 0$
3. Donner une équation cartésienne de la parallèle Δ' à Δ issue de $P(b, a)$ en utilisant:
   a) un déterminant b) un produit scalaire
4. On suppose $a \neq b$ et on pose $c = (1+\delta)a + (1-\delta)b$. Déterminer δ pour que le point $Q(c, c)$ soit sur le cercle $\mathscr{C}$. Donner une équation cartésienne de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ en Q sans utiliser ni produit scalaire, ni déterminant.

EXEMPLE N° 2 Reconnaître et esquisser les courbes données par la représentation:

1) $4x^2 + y^2 + 16x - 2y + 8 = 0$ 2) $-x + 2 + 4y^2 = 0$ 3) $x^2 - 3y^2 + 6x - 12y - 12 = 0$ 4) $y^2 - 2y - 4x^2 = 0$

5) $\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t \end{cases}, t \geqslant 0$ 6) $\begin{cases} x(t) = 3\,\mathrm{ch}\, t \\ y(t) = 1 - \mathrm{sh}\, t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ 7) $\begin{cases} x(t) = 2 + 3\sin t \\ y(t) = 1 + \cos t \end{cases}, t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Préciser le centre et les sommets éventuels. Donner une équation cartésienne des asymptotes si c'est une hyperbole.

EXEMPLE N° 3 a et b sont des nombres réels avec $ab \neq 0$ et $a \neq b$ et on pose $c = (1+\delta)a + (1-\delta)b$ avec $\delta = \pm 1$

1. Retrouver avec ce résultat une équation cartésienne, vu dans l'exemple 1, de la tangente $\mathscr{T}$ en $Q(c, c)$ au cercle
$$\mathscr{C}:\ x^2 + y^2 - 2(a+b)(x+y) + 8ab = 0$$
2. Déterminer la tangente au point $M_0(\frac{5}{2}, 4)$ de l'hyperbole $\mathscr{H}$ de sommet $A(-2, 1)$ et $A'(2, 1)$ qui admet pour asymptote la droite $\Delta:\ y = 2x + 1$
   a. en utilisant une équation cartésienne de $\mathscr{H}$
   b. en utilisant une représentation paramétrique de $\mathscr{H}$

EXEMPLE N° 4

Étant donnée une droite Δ du plan et F un point qui n'est pas sur Δ, on veut déterminer l'enveloppe $\mathscr{E}$ des médiatrices de [HF] lorsque H parcourt la droite Δ.

On considère, pour cela, un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ où O est le projeté orthogonal de F sur Δ et $\vec{\imath} = \dfrac{1}{\|\overrightarrow{OF}\|}\overrightarrow{OF}$.

1. Justifier qu'il existe un réel c non nul fixé avec $F(c, 0)$ et un réel t (paramètre) tel que $H(0, t)$
2. Donner un point $A(t)$ et un vecteur directeur $\vec{u}(t)$ de la médiatrice Δ_t de [HF], exprimé à l'aide de c et t.
3. On appelle $M(t) = \left(x(t), y(t)\right)$ le point courant de l'enveloppe $\mathscr{E}$ cherchée situé sur Δ_t.
   a. Justifier que: $\exists \lambda(t) \in \mathbb{R},\ M(t) = A(t) + \lambda(t)\vec{u}(t)$
   b. Justifier que: $\det\left(\vec{u}(t), M'(t)\right) = 0$
   c. Calculer alors $\lambda(t)$ puis exprimer $x(t)$ et $y(t)$.
4. Donner une équation cartésienne de l'enveloppe $\mathscr{E}$ cherchée et en déduire la nature de cette enveloppe.

EXEMPLE N° 5 Donner la longueur

- d'un cercle de rayon R ?
- de la courbe représentative de la fonction ch pour $x \in [-1, 1]$?
- d'un arche de cycloïde de représentation : $\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}$?

EXEMPLE N° 6 On veut déterminer, de 2 façons, la courbure aux points réguliers de la cycloïde Γ donnée par
$$f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$$

1. Pourquoi peut-on concentrer l'étude de la cycloïde pour $t \in [0, \pi]$?
2. On note $\vec{T}$ le premier vecteur de Frenet.
   Montrer que $\vec{T} = \begin{pmatrix} \sin \frac{t}{2} \\ \cos \frac{t}{2} \end{pmatrix}$ aux points réguliers pour les paramètres $t \in [0, \pi]$.
3. Déterminer la courbure en utilisant les formules de Frenet.
4. Déterminer γ en utilisant un relèvement de $\vec{T}$ sous la forme $\vec{T} = \begin{pmatrix} \cos\alpha(t) \\ \sin\alpha(t) \end{pmatrix}$

SUITE EXEMPLE N° 6

5) Déduire la développée Γ_D de la cycloïde à partir du calcul du rayon de courbure vu auparavant.

6) Retrouver cette développée par une autre méthode.

EXEMPLE N° 7 Déterminer, de deux façons, la développée de l'astroïde $\Gamma: \begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}, t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

EXERCICES SUR LE CHAPITRE V

EXERCICE N° 1 Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et m est un réel non nul.
On introduit les points $A(m,0)$ et $B(3m;0)$ et le cercle $\mathscr{C}_1$ d'équation $x^2+y^2-2mx=0$

1. *Tangentes à un cercle en un point extérieur*

- **a.** Donner le centre et le rayon R_1 de $\mathscr{C}_1$. Vérifier que B est un point situé à l'extérieur de $\mathscr{C}_1$.
- **b.** Δ_p est la droite de pente $p\in\mathbb{R}$ qui passe par B et Δ_∞ la droite verticale qui passe par B.
  - **i.** Prouver que B est la projection orthogonale de A sur Δ_∞. En déduire que Δ_∞ ne rencontre pas $\mathscr{C}_1$.
  - **ii.** Déterminer le projeté H_p de A sur Δ_p lorsque p est un réel puis la distance de A à Δ_p.
  - **iii.** Déterminer alors les deux tangentes à $\mathscr{C}_1$ issue de B.

2. On considère le cercle $\mathscr{C}_2$ de centre B et de rayon 3. Préciser, suivant la valeur de m, l'intersection $\mathscr{C}_1\cap\mathscr{C}_2$

EXERCICE N° 2 Dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthonormé du plan, on considère la droite $\Delta:\ x=-2$ et le point F de coordonnées $(1,0)$. Déterminer une équation réduite et esquisser la conique $\mathscr{C}$ de foyer F, de directrice $\mathscr{D}$ et d'excentricité $e=\frac{1}{2}$. Même question avec $e=2$.

EXERCICE N° 3 Déterminer l'enveloppe de la famille de droites $(\mathscr{D}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ où $\mathscr{D}_t:\ (t^3+3t)x-2y-t^3=0$.

EXERCICE N° 4 Quelle est la longueur de la courbe représentative de la fonction ln pour $x\in[\sqrt{3},\sqrt{8}]$?
Poser $u=\sqrt{1+t^2}$

EXERCICE N° 5

1. Déterminer une représentation paramétrique de la développée d'une ellipse en utilisant un calcul d'enveloppe.

2. Justifier que cette développée a une représentation paramétrique de la forme $\begin{pmatrix}X(t)\\Y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\cos^3 t\\k\alpha\sin^3 t\end{pmatrix}$ où $(\alpha,k)\in\mathbb{R}^3$

C'est donc l'image d'un astroïde $\begin{cases}x(t)=\alpha\cos^3 t\\y(t)=\alpha\sin^3 t\end{cases}$ *par une affinité vectorielle* $\left[\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x\\ky\end{pmatrix}\right]$

EXERCICE N° 6 On considère la courbe $\mathscr{C}$ paramétrée par $\mathscr{C}:\ f(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1+t)^2e^{-t}\\2(1+t)e^{-t}\end{pmatrix}$ pour $t\in[-1,+\infty[$

1. Construire la courbe $\mathscr{C}$

2. Calculer la longueur ℓ de la courbe
On pourra calculer la longueur pour $t\in[-1,A]$ *puis faire tendre* A *vers* $+\infty$

3.
- **a.** Déterminer le repère de Frenet de cette courbe.
- **b.** Pour t réel, calculer $\cos(2\operatorname{Arctan} t)$ et $\sin(2\operatorname{Arctan} t)$.
- **c.** Déterminer alors la courbure de cette courbe

4. Déterminer la développée $\mathscr{C}_D$ de cette courbe en utilisant deux méthodes différentes.

EXERCICE N° 7 On considère la courbe $\Gamma:\begin{cases}x(t)=t-\dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}\\[2mm] y(t)=\dfrac{1}{\operatorname{ch} t}\end{cases}$

1. Construire la courbe Γ

2. Montrer que $x'(t)^2+y'(t)^2=\dfrac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t}$ puis déterminer le repère de Frenet en un point régulier.

3. Déterminer alors le rayon de courbure en un point régulier.

4. Déterminer la développée de Γ à l'aide du rayon de courbure.

5. En remarquant que la normale à Γ en un point régulier est dirigée par $\vec{n}(t)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\operatorname{sh} t}\\1\end{pmatrix}$, déterminer la développée d'une autre façon en utilisant un calcul d'enveloppe.