EXEMPLE DU COURS SUR LE CHAPITRE III

EXEMPLE N° 0

1. Identifier les séries télescopiques suivantes : a) $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ b) $\sum \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

2. Identifier les séries de référence ci-dessous et préciser leur nature

a) $\sum \frac{1}{n^e}$ b) $\sum \frac{1}{e^n}$ c) $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ d) $\sum \frac{1}{2^{2n}}$ e) $\sum \frac{(-1)^n}{3^{2n+1}}$ $\sum \frac{n^e}{n^\pi}$

3. Préciser la nature de $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum(u_n+v_n)$ lorsque

a) $u_n=(-1)^n$ et $v_n=(-1)^{n+1}$ b) $u_n=3^n$ et $v_n=2^n$

4. Préciser la nature de la série $\sum \frac{1}{n^2+\cos^2 n}$

5. Préciser la nature de la série $\sum \frac{1}{n+(-1)^n \operatorname{Arctan}(n^{42})}$

EXEMPLE N° 2 Déterminer la nature de la série de terme général

1) $u_n=\frac{1}{2^n+n}$ 2) $u_n=\sin\frac{1}{\sqrt{n}}-\tan\frac{1}{\sqrt{n}}$ 3) $u_n=\frac{\left(\operatorname{sh}\frac{1}{n}\right)^2}{\ln(n+1)-\ln n}$ 4) $u_n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

EXEMPLE N° 3 Justifier l'existence et calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ où $u_n=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}+\frac{2^{n-1}}{e^{n+1}}$

CONTRE-EXEMPLE CV$\not\Rightarrow$ CVA Convergence et calcul de la somme pour la série harmonique alternée $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

EXEMPLE N° 4 Préciser la nature des séries

1) $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ 2) $u_n=ne^{-\sqrt{n}}$ 3) $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos n}{(-1)^n n^2+f(n)}$ où $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ avec $f(\mathbb{R})\subset[-2,2]$

EXEMPLE N° 5 Déterminer la nature des séries $\sum \frac{\ln n}{n^\alpha}$ où α est un réel strictement positif distinct de 1 fixé.

EXEMPLES DE CALCULS DE SOMMES $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ où $u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^{n-k}k!}$

EXEMPLE Preuve, par comparaison série/intégrale, du critère de Riemann : $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha>1$

EXEMPLE N° 6 Étudier la nature de la série $\sum\frac{\ln n}{n}$ à l'aide d'une comparaison série/intégrale.
Proposer un équivalent de la somme partielle.

EXEMPLE Les séries de Riemann alternée $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ convergent seulement si $\alpha>0$ (avec CVA si $\alpha>1$)

EXEMPLE N° 7 Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\left(\ln(n+1)-\ln n\right)$ converge sans converger absolument

CONTRE-EXEMPLE « (u_n) DÉCROISSANTE DANS TSA » « SIGNE DANS CRITÈRE D'ÉQUIVALENCE »

Prouver que la série $\sum\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+(-1)^k}$ est alternée avec un terme général qui tend vers 0 mais qu'elle ne converge pas.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE III

EXERCICE N° 1

1. Justifier l'existence de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ où $u_n = \operatorname{Arctan} \frac{1}{n^2+n+1}$

2. Simplifier le réel $\tan(\operatorname{Arctan}(n+1) - \operatorname{Arctan} n)$ après avoir justifié son existence.

3. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

EXERCICE N° 2

Étudier la nature de la série $\sum u_n$ où 1) $u_n = \dfrac{e^{in\frac{\pi}{3}}}{i+n\sqrt{n}}$ 2) $u_n = \dfrac{x^n}{n+\ln n}$ où $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

3) $u_n = \dfrac{n^{2n}}{(2n)!}$ 4) $u_n = \dfrac{(n+i)^n}{3^n n!}$ 5) $u_n = \dfrac{(-1)^n d(n)}{n^3 - 2\operatorname{Arctan} n}$ où $d(n)$ est le nombre de diviseur de n

EXERCICE N° 3

Justifier l'existence et calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ où:

1) $u_0 = 0$ et $u_n = \ln\left(1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}\right)$ sinon 2) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{3^k}{k!3^n}$ et $u_0 = 0$ puis $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{3^k}{k!3^n}$ et $u_0 = 0$

EXERCICE N° 4

L'objectif de l'exercice est de calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$ où $|x| < 1$

1. Justifier l'existence de la somme.

2. Pour $|x| < 1$, calculer de deux façons $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)^2$. Conclure.

3. Pour $|x| < 1$ et $N \in \mathbb{N}$, que vaut $\sum_{n=0}^{N} x^n$? En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{N} nx^n$. Conclure.

EXERCICE N° 5

Étudier suivant les valeurs du paramètre réel a la nature de la série $\sum u_n$ où $u_n = n^{n^a} - 1$

EXERCICE N° 6

En utilisant une comparaison série-intégrale, démontrer que: $\ln(n!) \sim n \ln n$

EXERCICE N° 7

Étudier la nature de la série $\sum u_n$ où $u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$