EXEMPLE DU COURS SUR LE CHAPITRE II

EXEMPLE N° 1 On définit

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} P(0) & P'(0) \\ P(1) & P'(1) \end{pmatrix} \mid P \in \mathbb{R}_2[X] \right\} \quad \text{et G le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de } M_2(\mathbb{R}).$$

1. Démontrer que F est un sev de $M_2(\mathbb{R})$ et préciser $\dim F$.

2. Rappeler $\dim G$ et expliciter une base de G

3. Prouver que F et G sont des supplémentaires dans $M_2(\mathbb{R})$.

4. Décomposer la matrice I_2 dans cette somme directe.

EXEMPLE N° 2 Dans cet exercice, on assimile le polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ et la fonction polynômiale $[x \mapsto P(x)] \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

1. Démontrer que $F = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(0) = f(1) = 0 \right\}$ et $\mathbb{R}_1[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

2. Décomposer la fonction exp dans cette somme directe.

EXEMPLE N° 3 On fixe un polynôme N de $\mathbb{R}[X]$ de degré $n > 0$ et un entier $m > n$. On appelle:

$$F = \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad G = \left\{ P \in \mathbb{R}[X], \mid N \text{ divise } P \text{ et } \deg P < m \right\} \quad \text{et} \quad \text{H l'ensemble des multiples de } X^m$$

Démontrer que $\mathbb{R}[X] = F \oplus G \oplus H$

EXEMPLE N° 4 On considère l'endomorphisme $u = [P \mapsto P']$ de $\mathbb{R}[X]$

1. Montrer que u laisse stable les sev $\mathbb{R}_n[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Donner la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme u_n induit par u sur $\mathbb{R}_n[X]$

EXEMPLE N° 5 Justifier, sans calcul, que F et G sont des espaces vectoriels et préciser la dimension:

$$F = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x_1 + x_n = 0\}, \ G = \{M \in M_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{Tr}(M) = 0\} \ \text{ et } H = \left\{ P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X] \mid a_0 + a_1 + \cdots + a_n = 0 \right\}$$

EXEMPLE N° 6 Démontrer que $H = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \;\middle|\; \int_{-1}^{1} P(t)\,dt = 0 \right\}$ est un hyperplan.
Préciser une équation de H dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et une base de H

EXEMPLE N° 7 On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$. Calculer $\mathrm{tr}(A)$, $\mathrm{tr}(B)$, $\mathrm{tr}(AB)$ et $\mathrm{tr}(BA)$

EXEMPLE N° 8 Si $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les matrices A, B, C, D de $M_n(\mathbb{K})$ telles que $\left\{ \begin{array}{l} AC + DB = I_n \\ CA + BD = 0 \end{array} \right.$?

EXEMPLE N° 9 Pour $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, justifier que $E = \left\{ M \in M_n(\mathbb{R}) \mid M + M^T = 2\mathrm{tr}(M) I_n \right\}$ est un espace vectoriel et préciser sa dimension

EXEMPLE N° 10 Calculer $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}$

EXEMPLE N° 11 *Calcul d'un déterminant tri-bandes d'ordre n*

Calculer, pour tout entier naturel n non nul, la valeur du déterminant d'ordre n: $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -3 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

EXEMPLE N° 12 *Diverses utilisations des déterminants*

1. Dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $A(-3,1,1)$, $B(3,3,1)$ et $C(9,0,3)$. Déterminer le volume du tétraèdre OABC en admettant que c'est le sixième du volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$

2. Donner une équation dans la base canonique de l'hyperplan $H = \mathrm{Vect}(1+X, 1+X+X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$

3. Prouver que les vecteurs $\vec{u} = (a, -a, 1, 0)$, $\vec{v} = (1, a, 0, 1)$, $\vec{w} = (0, 1, 0, a)$ et $\vec{t} = (1, 1, 1, 1)$ sont linéairement indépendants si et seulement si $a \neq 0$

4. Donner une CNS sur les paramètres a et b pour que $A = \begin{pmatrix} a & a & a & b \\ a & a & b & a \\ a & b & a & a \\ b & a & a & a \end{pmatrix}$ soit inversible.

EXEMPLE N° 13 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, les matrices suivantes sont-elles semblables à A ?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$ *On pourra calculer* $rg(A_3 - I_3)$

EXEMPLE N° 14 On définit f sur $\mathbb{R}_n[X]$ par: $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad f(P) = XP' + P(2)$.
Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et calculer sa trace et son déterminant.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE II

EXERCICE N° 1 On considère l'espace vectoriel $E = C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et on considère les sous-ensembles:

- F constitué des fonctions de E nulles sur $]-\infty,1]$
- G constitué des fonctions de E nulles sur $[0,+\infty[$
- H constitué des fonctions de E nulles en dehors de $]0,1[$

Démontrer que F, G et H sont des sev de E qui sont en somme directe

EXERCICE N° 2 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -4 & -3 & 8 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère le sev $E_\lambda = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda id)$ où id est l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$
Prouver que E_λ est un sev de $\mathbb{R}^3$ qui est stable par f

2. Déterminer une base des sev E_1, E_0 et E_{-1}

3. Prouver que E_1, E_0 et E_{-1} sont en somme directe

4. En déduire que $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_0 \oplus E_{-1}$

5. Déterminer une base adaptée à cette décomposition et donner la matrice de f dans cette base.

EXERCICE N° 3 Soit E un $\mathbb{K}$ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$, démontrer que:

$$\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}\, f \Leftrightarrow f^2 = 0 \quad \text{et} \quad \dim(E) = 2\mathrm{rg}(f)$$

Montrer alors qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que: $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} 0_{r,r} & I_r \\ \hline 0_{r,r} & 0_{r,r} \end{array}\right)$ avec $r = \mathrm{rg}(f)$

EXERCICE N° 4 On considère trois réels a, b et c et on pose $\vec{u} = (a,a,c)$, $\vec{v} = (b,c,b)$ et $\vec{w} = (ab,ac,bc)$
Donner une condition nécessaire et suffisante pour $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ soit une base de $\mathbb{R}^3$

EXERCICE N° 5 Calculer les déterminant d'ordre $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ suivants:

$$1)\ D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & 2 & \ddots & & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \qquad 2)\ D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix}$$

$$2.5)\ D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \qquad 3)\ D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & \dots & 0 & n-1 \\ 0 & x & \ddots & \vdots & n-2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & x & 1 \\ n-1 & n-2 & \dots & 1 & x \end{vmatrix}$$

EXERCICE N° 6 Soit $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$, calculer $D_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ x & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & x \\ 0 & \dots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$

Pour $n \geqslant 3$, on pourra rechercher une relation entre D_n, D_{n-1} *et* D_{n-2}

EXERCICE N° 7 Pour a et b des paramètres réels, on définit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ par

$$f(x,y,z,t) = \Big(a(x+y+z)+bt, a(x+y+t)+bz, a(x+z+t)+by, a(y+z+t)+bx\Big)$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un automorphisme.