EXEMPLE DU COURS SUR LE CHAPITRE XV

EXEMPLE N° 1

1. On lance trois fois un dé cubique non truqué et on note X le nombre de fois où le résultat est un as ou deux et Y le nombre de résultats plus grand que cinq. Montrer que X et Y ont la même loi. Sont-elles égales ?

Déterminer la loi de $U = |X - 2|$

2. On sait que Z est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 3P(Z = n+2) = 4P(Z = n+1) - P(Z = n)$

Déterminer la loi de Z et donner la probabilité de l'événement (Z est pair)

3. La variable Z admet-elle une espérance ? une variance ? Si oui les calculer.

EXEMPLE N° 2 On dispose de 6 urnes contenant chacune 6 boules indiscernables au toucher telles que l'urne n°i contient i boules blanches et les autres sont noires.
On lance un dé équilibré qui fixe le numéro d'un urne et on tire des boules dans cette urne avec remise jusqu'à obtenir une boule blanche.
On appelle N la variable aléatoire correspondant au numéro de l'urne et X celle donnant le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule blanche. Déterminer la loi du couple (N, X).

EXEMPLE N° 3 Soient $a \in \mathbb{R}$ et (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N},\ P(X = j, Y = k) = a\frac{j+k}{3^{j+k}}$$

1. Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, justifier la convergence et calculer la somme S_k de la série $\sum_{j\geqslant 0} \frac{j+k}{3^{j+k}}$

2. Déterminer la valeur de a.

3. Déterminer les lois marginales de X et Y

4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Calculer $P(X = Y)$

EXEMPLE N° 4 X, Y et Z sont trois variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

1. Donner la loi du couple (X, Y)

2. Démontrer que : $P(X + Y = k) = \dfrac{k-1}{n^2}$ si $k \in [\![2, n+1]\!]$ et $P(X + Y = k) = \dfrac{2n - k + 1}{n^2}$ si $k \in [\![n+1, 2n]\!]$

3. Démontrer que $P(X + Y = Z) = \dfrac{n-1}{2n^2}$

4. Quelle est la loi de $T = n + 1 - Z$. Que dire des variables $X + Y$ et T ? En déduire, sans calcul, $P(X + Y + Z = n + 1)$.

EXEMPLE N° 5 **A savoir refaire!**

1. $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ (loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ si : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = p(1-p)^{n-1}$
Vérifier que c'est bien une loi de probabilité, que X est d'espérance finie qu'on déterminera.

2. $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ (loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si : $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$
Vérifier que c'est bien une loi de probabilité, que X est d'espérance finie qu'on déterminera.

3. Calculer $E(X(X-1))$ lorsque : a) $X \sim \mathscr{G}(p)$ b) $Y \sim \mathscr{P}(\lambda)$

4. Justifier alors que X est de variance finie qu'on déterminera lorsque : a) $X \sim \mathscr{G}(p)$ b) $Y \sim \mathscr{P}(\lambda)$

EXEMPLE N° 6 Soit X une variable aléatoire discrète sur l'espace probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ de loi

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = \frac{(2k+1)a}{k^2(k+1)^2} \text{ où } a > 0 \text{ est fixé}$$

1. On pose $u_k = \dfrac{1}{k^2}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer $u_k - u_{k+1}$ et en déduire la valeurs de a.

2. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? une variance ?

3. La variable aléatoire $Y = (X+1)^2$ admet-elle une espérance ?

4. Retrouver, par une autre méthode, que Y n'est pas d'espérance finie.

EXEMPLES DU COURS Dans chacun des cas, déterminer la fonction génératrice associée à X.
En déduire que X est d'espérance et de variance finie qu'on précisera.

1) $X \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ 2) $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ 3) $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ 4) $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ 5) $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$

EXEMPLE N° 7 Soit une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables indépendantes et de même loi $\mathscr{B}(p)$ où $0 < p < 1$
on pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $U_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$, $Y_n = \dfrac{X_n + X_{n+1}}{2}$ et $V_n = \dfrac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}$

1. Montrer, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|U_n - p| \geqslant \varepsilon) = 0$

2. Préciser la loi de Y_n et montrer qu'elle possède une espérance qu'on déterminera.
Si $1 \leqslant n < m$, les variables aléatoires Y_n et Y_m sont-elles indépendantes?

3. Montrer, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|V_n - p| \geqslant \varepsilon) = 0$

EXERCICES SUR LE CHAPITRE XV

EXERCICE N° 1 Dans chacune des expériences qui suivent, reconnaître la loi de X

1. Un enclos contient 20 poules et 20 lapins. On sort un animal de l'enclos et on compte le nombre de pattes.

2. Une opératrice d'un centre d'appels dispose d'un fichier client de 1000 numéros. Les appels sont lancés de manière aléatoire sur ce fichier : sans réponse au bout de 3 sonneries l'appel est abandonné et on relance un nouvel appel (éventuellement vers le même numéro) et ainsi de suite jusqu'à obtenir un client en ligne.

On estime que chacun des client à une probabilité de 25% de répondre avant les 3 sonneries.

X est le nombre d'appel nécessaire pour que l'opératrice obtienne un client en ligne.

3. On répartit au hasard 100 élèves dans 3 classes et X est le nombre d'élèves dans la première classe.

4. On lance n fois deux dés équilibrés et X est le nombre de fois où on a un résultat avec deux dés identiques

5. On joue avec deux jeux de 32 cartes. On tire au hasard une carte dans le premier jeu. On tire ensuite des cartes dans le second jeu jusqu'à obtenir une carte de la même valeur que la première carte tirée et X est le nombre de tirage nécessaire.

EXERCICE N° 2 Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes

1. Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n_1, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n_2, p)$, quelle est la loi de $X+Y$? *Utiliser les fonctions génératrices*

Analyser le résultat à l'aide de l'interprétation probabiliste usuelle de la loi binomiale.

2. Si $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathscr{P}(\mu)$, quelle est la loi de $X+Y$?

3. Si $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{G}(q)$ avec $(p,q) \in]0,1[^2$, quelle est la probabilité que la matrice $\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable ?

EXERCICE N° 3 On lance une pièce truquée ayant une probabilité $p \in]0,1[$ de donner pile jusqu'à obtenir effectivement pile. On note $q = 1-p$ et N le nombre de lancers qui a été nécessaires. On relance ensuite la même pièce N fois et on appelle X le nombre de piles obtenus.

1. Déterminer la loi de N

2. Calculer alors $P(X=0)$ puis $P(X=k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. *On pourra introduire la dérivée kieme de f où $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$*

3. Calculer la fonction génératrice de X.

4. En déduire $E(X)$ et $V(X)$.

EXERCICE N° 4 Une urne contient deux boules blanches et une noire. On effectue une succession de tirages de la façon suivante : on tire une boule, si elle est noire, on la remet dans l'urne ; si elle est blanche, on remet dans l'urne une boule noire à la place de la blanche avant d'effectuer un nouveau tirage.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note Y_n le nombre de boules blanches présentes dans l'urne à l'issue du nieme tirage. Ainsi, Y_n prend ses valeurs dans $\{0,1,2\}$

1. **a.** Déterminer la loi de Y_1. *On pourra introduire l'événement* B_n *: « la boule tirée au nieme tirage est blanche »*

b. Prouver que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y_n = 2) = \dfrac{1}{3^n}$.

2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = P(Y_n = 1)$

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{2}{3^{n+1}}$ *<u>Indication</u> : Que dire de* $\Big\{(Y_n=0), (Y_n=1), (Y_n=2)\Big\}$?

b. En utilisant la suite (v_n) où $v_n = u_n + \dfrac{2}{3^n}$, vérifier que (v_n) est une suite géométrique.

Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $P(Y_n = 0)$ et l'espérance de Y_n

4. On appelle Z la variable aléatoire où, pour la première fois, l'urne ne contient plus que des boules noires.

a. Déterminer la loi de Z.

b. Montrer que Z possède une espérance et calculer $E(Z)$.