EXEMPLE DU COURS SUR LE CHAPITRE XIV

EXEMPLES L'espace est rapporté à un repère euclidien orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

- Montrer que la courbe paramétrée $\mathscr{C} : \begin{cases} x(t) = 2\cos(t) \\ y(t) = 0 \\ z(t) = 1 + \sin(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ est plane.
  Identifier $\mathscr{C}$. Justifier que $A(0,0,2)$ est un point de $\mathscr{C}$ et préciser la tangente en A à $\mathscr{C}$.
- Montrer que l'hélice $\mathscr{H} : \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \\ z = ht \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ ($R > 0$ et $h > 0$ sont fixés) est une courbe régulière dont les tangentes forment un angle constant avec l'axe $O + \text{Vect}(\vec{k})$.
- Donner une représentation cartésienne et paramétrique du cylindre de révolution.
  Identifier les sections planes du cylindre avec des plans normaux aux axes du repère.
- Identifier la surface d'équation $\dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1$ et proposer une représentation paramétrique de cette surface.
- Décrire la surface S d'équation S : $z = x^2 + y^2$ à l'aide de section plane par des plans normaux aux axes du repère.
- Montrer que $S : \begin{cases} x = u \\ y = uv^2 \\ z = u^2v^2 \end{cases}, (u, v) \in \mathbb{R}^2$ est incluse dans la surface $S_1 :\ xy = z$. Y-a-t-il égalité ?
- Déterminer les sections planes par des plans normaux aux axes du repère
  - d'un cylindre de révolution d'équation $x^2 + y^2 = R^2$ où $R > 0$ fixé
  - d'un paraboloïde de révolution d'équation $x^2 + y^2 = z$
- Prouver que l'hélice $\mathscr{H}$ est une courbe tracée sur le cylindre de révolution d'équation $x^2 + y^2 = R^2$
- Décrire les courbes coordonnées de la surface $S : \begin{cases} x(t,s) = x \\ y(t,s) = ts \\ z(t,s) = t^2 + s \end{cases}, (t,s) \in \mathbb{R}^2$.
  Y-a-t-il des points de S qui ne sont pas réguliers ?
  Donner une équation du plan tangent à S au point de paramètres $(t,s) = (1,1)$.
  Montrer que $S \subset \Sigma$ où Σ est donnée par l'équation cartésienne $zx^2 = y^2 + x^3$. Y-a-t-il égalité ?
  Préciser le plan tangent à Σ au point $M = (1,1,2)$
- Soit $a > 0$ et Γ la courbe définie par $\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 - ax + y^2 = 0 \end{cases}$
  Interpréter Γ comme l'intersection de deux surfaces qu'on identifiera.
  Montrer que Γ est une courbe régulière. Expliciter un paramétrage de la tangente à Γ en $A(a,0,0)$.
- Prouver que le cylindre de révolution est une surface réglée.
- Donner une équation cartésienne du paraboloïde hyperbolique qui est la surface réglée engendrée par la famille de droite $(\mathscr{D}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ où $\mathscr{D}_t = A_t + \text{Vect}(\vec{u}_t)$ avec $A_t(t, 0, t^2)$ et $\vec{u}_t = \vec{i} + \vec{j} + 2t\vec{k}$
  En examinant les sections planes de cette surface avec des plans normaux aux axes du repère, visualiser le paraboloïde hyperbolique .

EXEMPLE N° 2 L'espace est rapporté à un repère euclidien orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les sphères $S_1 : x^2+y^2+z^2-6x+8=0$ et S_2 de centre $\Omega_2(1,2,1)$ et de rayon $R_2=2$
Étudier $S_1 \cap S_2$ et préciser la position relative des deux sphères.

EXEMPLE N° 3 On donne, dans le repère orthonormée $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, les surfaces

$$S : \begin{cases} x = v^2 \sin u \\ y = v^2 \cos u \\ z = v \end{cases}, (u,v) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \Sigma : 4x^2+y^2+z^2=1$$

1. Montrer que ces deux surfaces sont de révolution. Donner l'axe et décrire les parallèles.
Méthode:
- Si la surface est donnée par une représentation paramétrique, on examine les familles de courbes coordonnées en espérant trouver une famille de cercles de même axe
- Si la surface est donnée par une représentation cartésienne, on examine des sections planes en espérant trouver, dans un cas, des cercles de même axe

2. Déterminer une équation cartésienne de S pour préciser les méridiennes.

EXEMPLE N° 4 Dans le repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, S est la surface de révolution obtenue par la rotation autour de l'axe $\mathscr{D} = O + \mathrm{Vect}(\vec{k})$ de la courbe $\Gamma : \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = \cos(2t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi[$

1. donner une représentation paramétrique de S

2. donner une représentation cartésienne de S et reconnaître S.

EXEMPLE N° 1 L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
On considère:
- la droite $\mathscr{D}$ qui passe par $A(3,2,1)$ et qui est dirigée par $\vec{u} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k}$
- la droite $\mathscr{D}'$ d'équations $\mathscr{D}' : \begin{cases} 2x+z=2 \\ y=1 \end{cases}$
- le plan $\mathscr{Q}$ d'équation $x+y+z=1$
- le plan $\mathscr{P}_m : mx-y+(2-m)z+m=4$ où m est un paramètre réel.
- S est la surface d'équation $x^2+y^2+z^2-2x+2z-2=0$

1. a. Donner un point A' et un vecteur directeur $\vec{u}'$ de la droite $\mathscr{D}'$.
b. Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont-elles coplanaires ?
c. On pose $\vec{u}'' = \vec{u} \wedge \vec{u}'$. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ issue de A' dirigée par $\vec{u}'$ et $\vec{u}''$.
d. Déterminer le point A'' d'intersection de $\mathscr{D}$ et du plan $\mathscr{P}$
e. Vérifier que la droite $\mathscr{D}'' = A'' + \mathrm{Vect}(\vec{u}'')$ est une perpendiculaire commune aux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$

2. a. Justifier que l'équation définissant $\mathscr{P}_m$ définit bien toujours un plan et que l'intersection $\Delta_m = \mathscr{P}_m \cap \mathscr{Q}$ définie une droite pour toutes les valeur de m.
b. Préciser un vecteur normal $\vec{n}_m$ de $\mathscr{P}_m$ et un vecteur directeur $\vec{u}_m$ de Δ_m
c. Démontrer qu'il y a une droite Δ fixe (càd qui ne dépend pas de m) qui est incluse dans tous les plans $\mathscr{P}_m$
d. Prouver que les droites Δ_m sont toutes sécantes en un point fixe C

3. a. Démontrer que S est une sphère dont on précisera le centre Ω et le rayon R.
b. Préciser la nature de l'intersection de S et du plan $\mathscr{Q}$.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE XIV

EXERCICE N° 1 L'espace est rapporté à un repère orthonormée $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$

1. Montrer que la courbe $\Gamma:\begin{cases} x(t)=t^2-1 \\ y(t)=2t \\ z(t)=t^2+t+1 \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ est plane et préciser une équation cartésienne de son plan Π.
2. Vérifier que $(\Omega;\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthogonal de Π où $\Omega(-1,0,1)$, $\vec{u}=\vec{\imath}+\vec{k}$ et $\vec{v}=-\vec{\imath}+4\vec{\jmath}+\vec{k}$
3. Démontrer alors que Γ est une parabole dont on précisera le sommet et l'axe de symétrie.

EXERCICE N° 2 L'espace est rapporté à un repère euclidien orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la surface $S:\begin{cases} x=u+v \\ y=2v^2+uv \\ z=u \end{cases}$, $(u,v)\in\mathbb{R}^2$
2. Déterminer un paramétrage de la surface $\Sigma:\ 4x^2-y^2+z^2=1$
3. Identifier les sections planes de Σ avec des plans normaux aux axes du repère.
   La surface Σ est un hyperboloïde à une nappe qui n'est pas de révolution.

EXERCICE N° 3 L'espace est rapporté à un repère euclidien orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
Discuter suivant la valeur du réel a la nature de la section plane
de la surface $S:\ x^2+2xyz+y^2+2x-2y=0$ avec le plan $\Pi_a:\ z=a$

EXERCICE N° 4 Dans le repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on considère les surfaces

$$S:\ x=8yz \qquad S_1:\ x^2+y^2+xy=1 \qquad S_2:\ y^2+z^2+yz=1$$

1. Déterminer le(s) plan(s) tangent(s) à S qui contiennent la droite $\mathscr{D}:\begin{cases} y=1 \\ x+4z+2=0 \end{cases}$
2. **a.** Justifier que les surfaces S_1 et S_2 sont régulières.
   b. Y-a-t-il des points de $\mathscr{C}=S_1\cap S_2$ où les plans tangents respectifs à S_1 et S_2 sont confondues ?
   c. Préciser la tangente en $A(0,1,0)$ de la courbe $\mathscr{C}=S_1\cap S_2$

EXERCICE N° 5 Dans le repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on considère la courbe $\Gamma:\begin{cases} x(t)=t \\ y(t)=\sin t \\ z(t)=\cos t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

1. Déterminer une représentation paramétrique de la surface réglée S engendrée par les tangentes à Γ
2. Déterminer les points non réguliers pour ce paramétrage.
3. Pour les points régulier, déterminer une équation cartésienne du plan tangent à S.
4. Démontrer alors que tous les points réguliers d'une même génératrice de S ont le même plan tangent.
   On dit, dans ce cas, que la surface réglée S *est développable.*

EXERCICE N° 6 L'espace est rapporté à un repère euclidien orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$. On donne les surfaces

$$S:\ z^3-3zy+2x=0 \qquad \text{et} \qquad \Sigma:\begin{cases} x=au\cos v \\ y=au\sin v \\ z=a+u \end{cases},\ (u,v)\in\mathbb{R}\times[0,2\pi]\ (a\in\mathbb{R}^*\ \text{fixé})$$

1. Montrer que S est une surface réglée. En déduire une représentation paramétrique de S.
2. **a.** Montrer que Σ est une surface réglée.
   b. Justifier que les génératrices ont un point commun et montrer qu'elles forment un angle constant avec l'axe $(Oz)=O+\mathrm{Vect}(\vec{k})$
   c. On note $M(u,v)$ le point courant de Σ. Pour $u\in\mathbb{R}$ fixé, identifier la courbe Γ_u paramétrée $\left[v\in[0,2\pi]\mapsto M(u,v)\right]$
   d. Donner une équation cartésienne de Σ

EXERCICE N° 7 Soit la surface S : $xy + yz + zx + x + y + z = 0$ dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

1. En utilisant le développement de $(x + y + z)^2$, faire disparaître les termes croisés de l'équation de S au profit de termes en x^2, y^2 et z^2

2. En déduire la nature de la section plane de S avec le plan $\Pi_k : x + y + z = k$ où $k \in \mathbb{R}$

3. En déduire que S est une surface de révolution et préciser son axe.

EXERCICE N° 8 Dans le repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on donne

la courbe $\Gamma : \begin{cases} 5x^2 + y^2 + 4x - 1 = 0 \\ 2x + z = 1 \end{cases}$ et la droite $\mathscr{D} : \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$

Déterminer une représentation cartésienne de la surface S engendrée par la rotation de Γ autour de $\mathscr{D}$.