EXEMPLE DU COURS SUR LE CHAPITRE XIII

EXEMPLE N° 0 : Justifier que les applications suivantes sont dérivables et calculer la dérivée lorsque c'est possible

$$F_1(x)=\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}\quad \text{et}\quad F_2(x)=\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$$

EXEMPLE N° 1 On considère les intégrales à paramètre suivante

$$F(x)=\int_0^1\frac{1-t^x}{1-t}\mathrm{d}t \text{ où } x\geqslant 0\qquad G(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^x\mathrm{d}t\quad \text{où } x\geqslant 0\qquad H(a)=\int_0^1\frac{\ln x}{x+a}\mathrm{d}x\quad \text{où } a\geqslant 0$$

et enfin $\mathrm{L}_\varphi(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-tx}\varphi(t)\mathrm{d}t$ où $x\in\mathbb{R}$ pour φ est continue sur $]0,+\infty[$ (Transformée de Laplace de φ)

I. Préciser, dans chaque cas, le paramètre d'une part, l'expression et l'intervalle d'intégration d'autre part.

II. Donner le domaine de définition des fonctions F, G, H, L_v et L_w où $v(t)=\ln t$ et $w(t)=t\ln t$

III. *Utilisation du théorème sur la continuité*

a) Étudier la continuité de F sur $[0,+\infty[$ (on pourra d'abord dominer sur $[0,A]$ avec $0<A$). En déduire $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\int_0^1\frac{1-t^x}{1-t}\mathrm{d}t$

b) de H sur $]0,+\infty[$ (on pourra d'abord dominer sur $[\varepsilon,A]$ avec $0<\varepsilon<A$)

IV. *Utilisation du théorème sur la dérivabilité*

a) Démontrer que H est de classe C^1 sur $[\varepsilon,+\infty[$ pour tout $\varepsilon>$ et calculer $H'(a)$ sans le symbole intégral.
Déterminer alors l'expression de $H(a)+H(\frac{1}{a})$ sans symbole intégral en faisant intervenir la constante $H(1)$.

b) Vérifier que L_v est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ (on pourra dominer sur $[a,+\infty[$ où $a>0$)
Montrer que $x\mathrm{L}_v'(x)=-\dfrac{1}{x}-\mathrm{L}_v(x)$ pour $x>0$ puis en déduire $\mathrm{L}_v(x)$ en fonction de la constante $\mathrm{L}_v(1)$.

V. Question 4 du sujet Maths C de 2017

a) Soit A un réel strictement positif. Montrer que, pour tout réel strictement positif t, et tout réel x de $[0,A]$:

$$|e^{-t}t^x|\leqslant(1+t^A)e^{-t}$$

b) Montrer que G est continue sur $[0,A]$.

c) Montrer que G est de classe C^∞ sur $[0,A]$.

d) En déduire que la fonction G est de classe C^∞ sur $[0,+\infty[$ et exprimer, pour tout entier naturel n et pour tout $x\geqslant0$, $G^{(n)}(x)$ sous forme d'une intégrale.

EXEMPLE N° 2 Étudier la continuité de $\left[F: x\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}xe^{-xt}\mathrm{d}t\right]$ sur $[0,+\infty[$

EXERCICES SUR LE CHAPITRE XIII

EXERCICE N° 1 On considère la fonction f définie par : $f(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\operatorname{ch}(2xt)\mathrm{d}t$

1. Justifier que f est définie pour tout x réel.

2. Établir que f est de classe C^1 sur $[-A, A]$ pour tout réel $A>0$.

3. En déduire que f est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

4. Déterminer enfin $f(x)$ sans le symbole intégrale. On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

EXERCICE N° 2 On définit la fonction f par : $f(x)=\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$

1. Prouver que, pour tout t réel, on a : $|\sin t|\leqslant|t|$

2. Prouver que f est définie sur $[0,+\infty[$.

3. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ et, en admettant $|f(x)-f(0)|\leqslant 2x$ pour tout réel $x\geqslant 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$

4. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et qu'elle est continue sur $[0,+\infty[$
On pourra dominer sur $[\varepsilon,+\infty[$ *pour* $\varepsilon>0$

5. Prouver que : $\forall x>0,\ f'(x)=-\frac{1}{1+x^2}$. Exprimer alors $f(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

6. Déduire la valeur de l'intégrale de Dirichlet $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.

EXERCICE N° 3 On considère la fonction f définie par : $f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(xt)}{t^2}e^{-t}\mathrm{d}t$

1. Établir et quantifier l'égalité : $\int_0^x \operatorname{Arctan}(2t)\mathrm{d}t = x\operatorname{Arctan}(2x)-\frac{1}{4}\ln(1+4x^2)$

2. Prouver que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On rappelle que $\forall u\in\mathbb{R},\ |\sin u|\leqslant|u|$.

3. Préciser $f''(x)$ et en déduire l'expression de f à l'aide des fonctions usuelles.