EXEMPLE DU COURS SUR LE CHAPITRE XII

EXEMPLE N° 1 (D'après oral maths 2)
On dispose de deux urnes. L'urne $\mathscr{U}_1$ contient 4 boules noires et 2 boules blanches. L'urne $\mathscr{U}_2$ contient 2 boules noires et 4 boules blanches. On choisit une urne au hasard et on tire successivement 3 boules avec remise dans cette urne. Sachant que les 2 premières boules sont noires, quelle est la probabilité que la 3ème le soit aussi ?

EXEMPLE N° 2 On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On considère les événements :

A : « on obtient 3 ou 6 » et B : « on obtient un multiple de 2 »

1. On suppose le dé bien équilibré. Les événements A et B sont ils indépendants ?

2. Même question sachant que le dé est truqué : le 6 apparaît avec une proba $\frac{1}{2}$ et les autres faces sont équiprobables.

EXEMPLE N° 3 On lance deux fois de suite un dé à 6 faces bien équilibré. On définit les événements :

A : « le premier lancer amène un chiffre pair » ; B : « le deuxième lancer amène un chiffre impair » ;

C : « l'un des lancer amène un chiffre pair, l'autre un chiffre impair ».

Montrer que les événements A, B et C sont deux à deux indépendants. Sont-ils mutuellement indépendants ?

EXEMPLE N° 4 (D'après oral maths 2)
On considère un dé à 6 faces avec 2 faces portant le numéro 0, 2 faces portant le numéro 1 et 2 autres faces portant le numéro 2. On réalise trois lancers indépendants et on note A, B et C les résultats.
On note alors G la partie du plan $\mathbb{R}^2$ d'équation cartésienne $Ax + By + C = 0$
On réalise une deuxième fois les trois tirages. Les résultats sont notés A', B' et C' et on note H la partie du plan $\mathbb{R}^2$ d'équation cartésienne $A'x + B'y + C' = 0$

1. Calculer la probabilité que G soit une droite.

2. Calculer la probabilité que G soit une droite perpendiculaire à la première bissectrice du plan.

3. Calculer la probabilité que G et H soient toutes les deux des droites.

4. Calculer la probabilité que G et H soient des droites et qu'elles soient parallèles.

EXEMPLE N° 5 On effectue une suite de jeu de pile ou face.

On définit l'événement A_n « Obtenir pile au n ième lancer » pour $n \in \mathbb{N}^*$

1. a. Décrire dans le vocabulaire probabiliste les événements

$$E_1 = \bigcap_{n=10}^{+\infty} A_n, \quad E_2 = \bigcap_{n=1}^{10} \overline{A_n}, \quad E_3 = \bigcap_{n>10} \overline{A_n} \quad \text{et} \quad E_4 = \bigcup_{n\geqslant 10} A_n$$

b. Que dire des évènements E_1 et E_2 ?

Les événements E_2 et E_3 sont-ils forcément incompatibles ? sont-ils indépendants ?

2. Décrire à l'aide de notations ensemblistes les événements:

B_1: « Il y a au moins un pile sur les 10 premiers lancers »

B_2: « Le premier pile, s'il y en a un, n'est pas obtenu sur les 10 premiers lancers »

B_3: « On obtient un pile au delà strictement du 10 ième lancer et pas avant »

B_4: « On obtient un pile au delà strictement du 10 ième lancer »

3. Démontrer que $\overline{\bigcup_{n\geqslant 1} A_n} = \bigcap_{n\geqslant 1} \overline{A_n}$ et décrire cet événement dans le vocabulaire probabiliste.

4. On pose $C_n = \bigcup_{k>n} A_k$. Démontrer que la suite $(C_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante c'est à dire que: $C_{n+1} \subset C_n$

Décrire dans le vocabulaire probabiliste les événements C_n et l'événement $C = \bigcap_{n\geqslant 1} C_n$

5. Décrire à l'aide de notations ensemblistes l'événement

« On obtient que des piles à partir d'un moment dans le jeu »

EXEMPLE N° 6 *Vais-je sortir un cheval de l'écurie lorsque je joue au jeu des petits chevaux?*

On considère le jeu consistant à lancer un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6.
On considère l'événement A_n : « on réalise un 6 au n-ème lancer » et on donne $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$.

1. Comment décrire l'événement B_n ? Calculer sa probabilité.

2. Décrire l'événement $B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$. Calculer sa probabilité. En déduire la réponse à la question initiale (en italique) .

EXEMPLE N° 7 On admet qu'on peut définir une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ en posant $P(\{n\}) = \dfrac{\lambda}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où $\lambda > 0$ est à choisir convenablement

1. Déterminer $\lambda > 0$ en utilisant les propriétés d'une probabilité.

2. Calculer la probabilité $P\Big(\{2k+1 \mid k \in \mathbb{N}\}\Big)$

3. Si $B_n = \{2k \mid k \in [\![0, n]\!]\}$, calculer $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right)$

EXEMPLE N° 8 On lance deux dés équilibrés jusqu'à obtenir un total de 5 ou de 7.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E_n l'événement « on obtient 5 pour la première fois au n ieme lancer », calculer $P(E_n)$.

2. Quelle est la probabilité que le jeu s'arrête parce qu'on a obtenu un 5 ?

3. Quelle est la probabilité que le jeu s'arrête parce qu'on a obtenu un 7 ?

4. Quelle est la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais ?

5. Si on joue avec un total qui vaut 2 ou 3 à la place de 5 ou 7, est-ce que le jeu s'arrête ?

EXERCICES SUR LE CHAPITRE XII

EXERCICE N° 0 Dans la population, on estime que 3% de la population est atteinte d'une maladie.
On dispose d'un test de dépistage dont les caractéristiques sont les suivantes :

- Si l'individu est malade, le résultat du test est positif dans 95% des cas
- Si l'individu n'est pas malade, le résultat du test est positif dans 4% des cas (Faux positif)

1. On choisit un individu au hasard dans la population et on lui fait passer un test. Le résultat est positif.
Quelle est la probabilité que l'individu soit malade?

2. On décide de faire passer un deuxième test et le résultat de ce second test est toujours positif.
Quelle est la probabilité que l'individu soit malade?

3. On décide, cette fois, de cibler la population de sorte qu'on choisit l'individu dans un groupe où la prévalence de la maladie est de l'ordre de 15%.
Quelle est la probabilité que l'individu soit malade alors qu'il a passé un seul test dont le résultat est positif?

EXERCICE N° 1 Au moment où chacun possède un tiers du marché de téléphonie mobile, trois opérateurs A, B et C décident de revoir leurs offres de forfaits. À la fin de l'année, le marché a évolué de la façon suivante :

- les clients de l'opérateur A se répartissent indifféremment entre A, B et C pour l'année suivante;
- les clients de l'opérateur B restent fidèles à cette compagnie;
- les clients de l'opérateur C deviennent soit clients de A avec une probabilité $\dfrac{1}{12}$, soit clients de B avec une probabilité $\dfrac{7}{12}$ ou soit ils restent fidèles à C.

On note, pour $n \in \mathbb{N}$, a_n, b_n et c_n les probabilités pour qu'un consommateur soit un abonné de A, B ou C lors de la nieme année. On suppose, bien sûr, que les consommateurs sont clients d'au moins un des opérateurs et un seul chaque année.

1. Déterminer une relation de récurrence entre le vecteur $X_n = (a_n\ b_n\ c_n)$ et le vecteur X_{n+1}

2. Exprimer alors a_n, b_n et c_n en fonction de n puis donner l'évolution à long terme du marché.

EXERCICE N° 2 On lance une pièce équilibrée une seule fois au début de l'expérience puis on réalise des tirages successifs avec remise de boules indiscernables au toucher dans une urne selon le protocole suivant :

- l'urne contient initialement une boule noire et une boule blanche pour le premier tirage
- pour le $k+1$ ème tirage, on ajoute une boule à l'urne utilisée pour le k ème tirage : cette boule sera blanche si on a obtenu pile ou noire si on a obtenu face.

1. Combien l'urne compte-t-elle de boules au k ieme tirage ?

2. Calculer la probabilité de tirer une boule blanche au k ieme tirage.

3. Sachant qu'on a tiré une boule blanche au k ieme tirage, qu'elle est la probabilité p_k d'avoir obtenu pile lors de lancer initial ?

4. Calculer la probabilité de ne tirer que des boules blanches sur les k premiers tirages.

EXERCICE N° 3 On lance indéfiniment une pièce truquée où la probabilité d'obtenir PILE est $p \in]0,1[$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les événements :

F_n « on obtient face au nieme lancer »
A_n « on obtient au moins une fois face au cours des n premiers lancers »
B_n « on obtient au moins une fois la séquence (pile,pile,face) lors des n premiers lancers »

1. a. Calculer $P(A_n)$.

b. Que représente l'événement $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$? Calculer $P(A)$. Interpréter.

2. Dans cette question, on considère que la pièce est équilibrée autrement dit $p = \dfrac{1}{2}$

a. Comparer B_n et B_{n+1}. Y-a-t-il égalité ?

b. Démontrer que : $\forall n \geqslant 3,\ P(B_{n+1}) = P(B_n) + \dfrac{1}{8}\big(1 - P(B_{n-2})\big)$.

c. En déduire que la suite $\big(P(B_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

d. Interpréter le résultat.

EXERCICE N° 4 Dans une population, la probabilité p_n qu'une famille ait n enfants est $p_n = a\dfrac{2^n}{n!}$ avec $a > 0$.
On suppose également qu'il est équiprobable qu'un enfant soit une fille ou garçon.

1. Déterminer la valeur de a.

2. Calculer la probabilité qu'une famille ait au moins un garçon.

3. On suppose qu'une famille a exactement un garçon. Quelle est la probabilité que la famille comporte deux enfants?