EXEMPLE DU COURS SUR LE CHAPITRE XI

EXEMPLE N° 1 On considère la matrice $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b \\ \sqrt{2} & d & c \end{pmatrix}$ où (a, b, c, d) sont des réels.

Déterminer ces réels pour que A soit une matrice orthogonale.

SUITE EXEMPLE N° 1 Décrire géométriquement l'isométrie f qui est alors canoniquement associée à A

EXERCICE CLASSIQUE *Expression vectorielle d'une rotation de l'espace*

On considère une rotation r vectorielle d'axe $D = \text{Vect}(u)$ où u est unitaire, d'angle θ.

Démontrer que, pour tout vecteur x, $r(x) = (\cos\theta)x + (\sin\theta)u \wedge x + (1-\cos\theta)(x.u)u$

Application: En utilisant cette expression, donner la matrice dans la base canonique ($\mathscr{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de la rotation d'axe orienté par $\vec{\imath} - \vec{k}$ et d'angle π

EXEMPLE N° 2 On note $\mathscr{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de la réflexion par rapport au plan F d'équation: $x + y + z = 0$

2. Déterminer la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de la rotation d'axe orienté par $\vec{\imath} - \vec{k}$ et d'angle π

Un contre-exemple au théorème spectral dans $\mathscr{S}_2(\mathbb{C})$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice symétrique d'ordre 2 à coefficients complexes soit non diagonalisable. Proposer un exemple concret de matrice symétrique complexe non diagonalisable.

EXEMPLE N° 3 Déterminer une matrice $P \in O_3(\mathbb{R})$ telle que $P^T\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}P$ soit diagonale.

EXEMPLE N° 4 Le plan est munit d'un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ orthonormé direct.

Identifier et préciser les éléments caractéristiques de la coniques $\mathscr{C}$ donner par :

1) $3x^2 + 4xy - 9 = 0$ 2) $x^2 + y^2 - 2xy + \varepsilon x + y = 0$ $(\varepsilon = \pm 1)$ 3) $\frac{5}{2}(x^2 + y^2) - 3xy + \sqrt{2}(x + y) = 0$

EXEMPLE N° 5 Chercher les extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$ de l'expression et dire s'ils sont globaux pour

1) $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^3$ 2) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$ 3) $f(x, y) = x^3 + y^4 - yx^2 - xy^2$

Pas d'étude de globalité dans le 3)

EXEMPLE N° 6 Rechercher les extrema de f sur $D = [0, 1]^2$ lorsque $f(x, y) = x^2 + 2xy - 2y^2 + x + 3y$

EXERCICES SUR LE CHAPITRE XI

EXERCICE N° 0 Trouver une matrice P orthogonale telle que $P^T AP$ soit diagonale (Préciser P et la matrice $P^T AP$ associée) lorsque : 1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

EXERCICE N° 1 Montrer que l'endomorphisme f canoniquement associé à la matrice A est une isométrie. Caractériser géométriquement cet endomorphisme.

1) $A = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & -a \end{pmatrix}$ où $a \in \{-1, 1\}$ 2) $A = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ 3) $A = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha & \sin\alpha \\ \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha & -\cos\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \end{pmatrix}$, $(\alpha \in \mathbb{R})$

EXERCICE N° 2 Réduire la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ avec une matrice de passage orthogonale.

EXERCICE N° 3

1. Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ nilpotente, prouver que $S = 0$

2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ nilpotente avec $A^T A = AA^T$, démontrer, en utilisant la question précédente, que $A = 0$

EXERCICE N° 4 $M_n(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire canonique. Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, on définit $\left[f_A : M \mapsto AM\right]$ Donner une CNS sur A pour que f_A soit un endomorphisme orthogonal de $M_n(\mathbb{R})$.

EXERCICE N° 9/2

1. Identifier et représenter la courbe $\mathscr{C} : 2x^2 + 3xy + 2y^2 - 4x - 3y = 0$ donnée dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$
On donne $\sqrt{7} \simeq 2,6$

2. Identifier et représenter la courbe $\mathscr{C} : x^2 - 5y^2 + 8xy - 14x + 28y - 56 = 0$ donnée dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$
On donne $\sqrt{3} \simeq 1,7$, $\sqrt{5} \simeq 2,2$ et $\sqrt{7} \simeq 2,6$

EXERCICE N° 5 Discuter, suivant la valeur du paramètre réel a, la nature de la conique $\mathscr{C}_a$ d'équation

$$\mathscr{C}_a : \quad (a+1)(x^2 + y^2) - 2(a-1)xy + \sqrt{2}(x+y) = 0$$

EXERCICE N° 7 *Un exercice d'oral d'étude d'extrema*

On considère le fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = \dfrac{1}{4}(x+y)^2 - \dfrac{1}{6}(x^3 + y^3)$.

1. Déterminer les points critiques de f.

2. En utilisant la matrice Hessienne, montrer que vous pouvez conclure sur la nature d'un des points critiques de f qu'on notera (x_0, y_0)

3. En utilisant un équivalent en l'infini de $f(x, x) - f(x_0, y_0)$, montrer que l'extremum en (x_0, y_0) n'est pas global.

4. Donner un équivalent simple de $f(x, -x + x^3)$ en 0. f admet-elle un extremum local en $(0, 0)$.

5. Pourquoi f admet forcément des extrema sur $[0, 1]^2$? Déterminer les extrema de f sur $[0, 1]^2$