EXEMPLE DU COURS SUR LE CHAPITRE X

EXEMPLE N° 1

1. La série géométrique $\sum z^n$ est associée à la suite des coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n =$

On sait déjà que cette série converge lorsque et que sa somme est $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n =$

2. La série $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ est associée à la suite des coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n =$

On reconnaît la série de l'exponentielle: elle converge et sa somme est $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!} =$

3. La série $\sum_{n\geqslant 2} \dfrac{z^n}{n(n-1)}$ est associée à la suite des coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n =$

4. La série $\sum \dfrac{(-2)^n x^{2n}}{2n+1}$ est associée à la suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n =$

EXEMPLE N° 2 Donner le domaine de définition de la fonction de la variable réelle x où $\left[f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}\right]$

SUITE EXEMPLE N° 1 Déterminer le rayon de convergence pour chacune des séries entières de l'exemple 1.

EXEMPLE N° 3 Déterminer le rayon de convergence des séries

$$1)\ \sum \frac{n^2+1}{n\sqrt{n}} x^n \qquad 2)\ \sum \mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{1+n^2}\right) x^n \qquad 3)\ \sum \frac{\mathrm{Arctan}(n)}{n^{2023}} x^n$$

EXEMPLE N° 4 Des exemples à connaître: Calculer les sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}$ pour $|x| < 1$

EXEMPLE N° 5 Soit la fonction f d'une variable réelle x définie par: $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} x^{n-1}$

1. Déterminer le domaine de définition D de f

2. Exprimer $f(x)$ à l'aide des fonctions usuelles pour toutes les valeurs de x dans $]-1,1[$

3. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$

EXEMPLE N° 6 Déterminer les développements en série entière en 0 de f lorsque

1. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ **2.** $f(x) = \mathrm{Arctan}\, x$ **3.)** $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ *(3 méthodes possibles)*

EXEMPLE N° 7 Prouver que la fonction sinus cardinal d'expression $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ pour $x \neq 0$ se prolonge par continuité en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$

EXEMPLE N° 8

Un contre-exemple: On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ sinon.

1. Démontrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ avec $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On pourra vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists P_n \in \mathbb{R}[X], \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}}$

2. Quelle est la série de Taylor de f ? En déduire que f n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

EXEMPLE N° 9 Déterminer les solutions développables en séries entière de $y'' + xy' + y = 0$ (E)

EXEMPLE N° 10 En utilisant que $[x \mapsto e^x]$ est l'unique solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$, retrouver le développement en série entière de la fonction exponentielle.

SUITE EXEMPLE N° 8 Reconnaître la fonction développable solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y'' + xy' + y = 0 \text{ (E)} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

EXERCICES SUR LE CHAPITRE X

EXERCICE N° 1 Déterminer le rayon de convergence des séries entières

1) $\binom{3n}{n} z^{3n}$ 2) $\sum \frac{z^{2n+1}}{\sqrt{n}^{\sqrt{n}}}$ 3) $\sum \left(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}\right) z^n$ 4) $\sum a_n x^n$ où $a_n = \begin{cases} \text{ch}(n) \text{ si } n \text{ est pair} \\ e^{-n} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$ 5) $\sum a_n z^n$ où a_n est la nieme décimale de $\sqrt{2}$

EXERCICE N° 2 Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières

1) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n-1}{n!} x^n$ 2) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+n+1}{2^n} x^n$ 3) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{2n+1}$ 4) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n(n+2)}$ 5) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}$

EXERCICE N° 3 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note H_n la somme partielle d'ordre n de la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$

1. Montrer que $\mathrm{H}_n \sim \ln n$ *On pourra utiliser une comparaison série-intégrale*

2. En déduire le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$

3. En utilisant un produit de Cauchy, calculer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$

EXERCICE N° 4 Existence et calcul des développements en série entière de: 1) $f(x) = \ln \frac{1-2x}{3-x}$ 2) $f(x) = \text{ch}\, x \cos x$

EXERCICE N° 5 Justifier que $\left[f : x \mapsto \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2} \mathrm{d}t\right]$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et préciser les dérivées successives en 0.

EXERCICE N° 6 On considère la fonction f de la variable réelle x d'expression $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)} x^{2n+1}$

1. Déterminer le domaine de définition de f

2. Pour $x \in]-1, 1[$, exprimer $f'(x)$ puis $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

3. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)}$

EXERCICE N° 7 Montrer que l'équation $t^2 y'' + 4ty' + (2 - t^2) y = 1$ admet une unique solution développable en série entière au voisinage de 0 qu'on déterminera.

EXERCICE N° 8 En utilisant une équation différentielle au 2nd ordre vérifiée par f,
déterminer le développement en série entière en 0 de $f = [x \mapsto (\text{Arcsin}\, x)^2]$

EXERCICE N° 9 On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ où $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1} a_{n-1} \text{ et } a_0 = a_1 = 1$$

1. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leqslant a_n \leqslant n^2$.

2. En déduire le rayon R de convergence de la série entière.

3. Montrer que la somme S de cette série vérifie une EDL_1 sans second membre sur $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$.

4. Déterminer S.